Escuela Nacional Central de Agricultura

ENCA GUATEMALA

Fundada en 1921

TEXTO DE APOYO

MATEMÁTICA

6665-1345 ext. 212

5711-3603

admision@enca.edu.gt

ÍNDICE

Pág.

PRESENTACIÓN

Esta guía nace con la finalidad de apoyar la preparación académica en el área de matemática de los aspirantes que se someten al examen de admisión de la ENCA, así como de los estudiantes que llevarán a cabo el curso propedéutico en esta misma institución.

Su contenido se ha dividido en dos partes principales que son:

1. **Los pilares esenciales del aprendizaje matemático:** en esta sección se abordan los principales temas que serán evaluados en el examen de preselección, desde la proporción, que nos permite comprender relaciones numéricas y resolver problemas prácticos, hasta la factorización algebraica, esencial para simplificar expresiones y resolver ecuaciones. También se exploran las ecuaciones e inecuaciones, herramientas clave para modelar y analizar situaciones, y las funciones, que establecen relaciones entre variables. Finalmente, se incluye una introducción a la geometría plana, permitiendo explorar figuras, áreas y propiedades.

2. **Conjuntos numéricos y operaciones algebraicas:** la segunda parte está diseñada para apoyar el aprendizaje de los estudiantes que llevarán el curso propedéutico, mismo que se da después de haber sido preseleccionados en el examen de admisión. Esta parte se enfoca en los diferentes conjuntos numéricos, tales como los naturales, enteros, racionales y reales, profundizando en su estructura y propiedades. Aborda temas importantísimos como la jerarquía operativa y, además, ofrece los conocimientos básicos de las operaciones algebraicas, que sirven como fundamento para manipular y resolver problemas matemáticos con confianza y precisión, llegando incluso a ejemplificar con ejercicios aplicados al campo agrícola, forestal y agroindustrial.

Es importante señalar que, por abordarse un amplio rango de temas, en esta guía no se profundiza completamente en éstos, tal como sería el objetivo de un libro de matemática. Por esta razón se aconseja que el futuro alumno complemente sus conocimientos con otras fuentes de información. Además, también es aconsejable el apoyo de un tutor, quien puede guiarse con el contenido de esta guía y utilizar los ejercicios propuestos para aclarar las dudas del tutorado.

Por último, esta guía constituye un documento en proceso continuo de mejoramiento, por lo que cualquier aporte para mejorarla será bienvenido.

PARTE 1. PILARES ESENCIALES DEL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

1. PROPORCIONALIDAD

La proporcionalidad es un concepto matemático fundamental que se encuentra en muchas áreas de la vida diaria. Esta nos permite entender y manipular las relaciones entre diferentes cantidades de manera precisa y eficiente. Nos ayuda a hacer comparaciones justas, tomar decisiones informadas y resolver problemas en diversas situaciones.

1. **Cocina**: Las recetas de cocina suelen requerir proporciones específicas de ingredientes. Si quieres duplicar una receta, necesitarás duplicar las cantidades de todos los ingredientes manteniendo la proporción original. Esto asegura que el sabor y la textura del platillo se mantengan consistentes.
2. **Compras**: Cuando compramos productos a granel o comparamos precios, la proporcionalidad nos ayuda a determinar cuál es la mejor oferta. Por ejemplo, si 1 libra de arroz cuesta Q7, pero una bolsa de 5 libras cuesta Q30, podemos calcular cuál es la opción más económica.
3. **Construcción**: En la construcción y el diseño, la proporcionalidad es crucial para mantener la estética y la funcionalidad. Los arquitectos y diseñadores utilizan proporciones para crear estructuras equilibradas y armoniosas.
4. **Salud y ejercicio**: La dosificación de medicamentos y la planificación de rutinas de ejercicio a menudo dependen de la proporción. Por ejemplo, la cantidad de medicamento que una persona necesita puede estar en proporción a su peso corporal.
5. **Finanzas**: En la gestión financiera, la proporcionalidad se utiliza para calcular intereses, impuestos y presupuestos. Entender cómo varían las cantidades en proporción a otras nos permite tomar decisiones financieras informadas.
6. **Educación**: En las matemáticas y otras ciencias, la proporcionalidad es un concepto fundamental que se enseña desde temprana edad. Esto ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas.
7. **Transporte**: Al planificar un viaje, la proporcionalidad nos ayuda a calcular tiempos y distancias. Por ejemplo, si sabemos que viajamos a una velocidad constante de 60 kilómetros por hora, podemos estimar cuánto tiempo tardaremos en recorrer una distancia determinada.

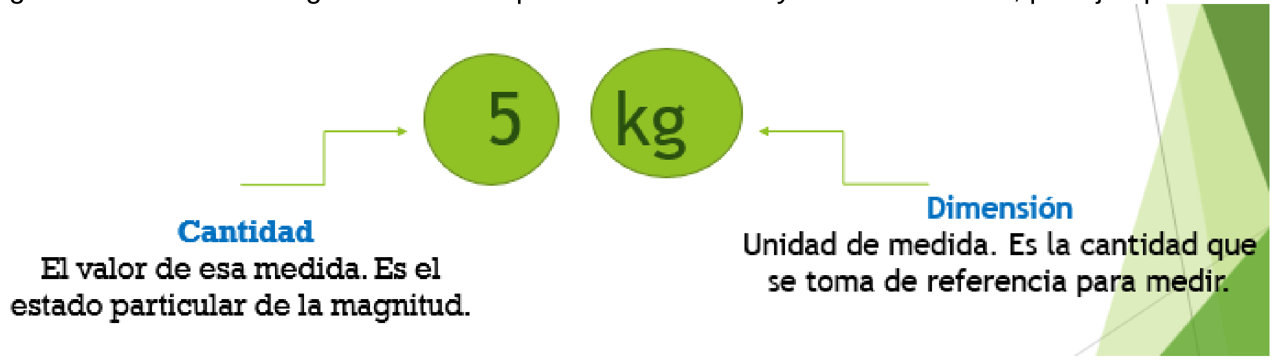
1.1. CONCEPTOS IMPORTANTES DE PROPORCIONALIDAD

Cantidad: Una cantidad es una medida de cuántas unidades existen de algo. Por ejemplo, si tienes 5 manzanas, la cantidad de manzanas es 5. Las cantidades pueden ser discretas (como el número de manzanas) o continuas (como la cantidad de agua en un vaso).

Una cantidad puede aumentar o disminuir. También es factible de ser medida. A continuación se presentan cosas que pueden ser medidas:

- Velocidad
- Dosis
- Área o superficie
- Densidad de siembra
- Peso específico
- Longitud
- Número de trabajadores
- Tiempo

Magnitud: La magnitud se refiere a la medida o tamaño de una cantidad. Es una propiedad que se puede medir y comparar. Por ejemplo, la magnitud de una distancia puede ser 5 kilómetros, y la magnitud de una fuerza puede ser 10 newtons. La magnitud se expresa en unidades adecuadas según el contexto. La magnitud tendrá implícita una cantidad y una dimensional, por ejemplo:



Otros ejemplos de magnitudes son:

- Estatura de una persona: 1.71 m
- Masa de un lechón (cría del cerdo): 5 kg
- Tiempo: 45 minutos.
- Dosis de un insecticida: 50 cc/bomba
- Densidad de siembra: 5 plantas/m^2.
- Velocidad de un automóvil: 80 km/hora
- Dosis de fertilizante: 200 kg de nitrógeno por hectárea

Como podrás ver, en todos los ejemplos anteriores, las magnitudes tienen dentro de sí una cantidad y una dimensional.

Razón: En matemáticas, una razón es una relación entre dos magnitudes o cantidades que indica cuántas veces una contiene a la otra. Se expresa como una fracción, por ejemplo, la razón de 2 a 4 se puede escribir como 2/4. Las razones se utilizan para comparar cantidades de manera relativa, y pueden ser proporciones, tasas, etc.

Es el cociente de dos números a y b (con b ≠ 0). Estas magnitudes pueden ser de la misma o de diferente cantidad. Simbólicamente se representa por:

a : b o bien $\mathbf{\frac{a}{b}}$ y se lee **a** es a **b**

Ejemplos de razones pueden ser:

Caudal (Q)

$$\frac{Volumen}{Tiempo}\left(\frac{5\ litros}{minuto}\right)$$

Densidad animal (carga animal)

$$\frac{Número\ de\ animales}{Área}\left(\frac{14\ \text{pollos}}{m^2}\right)$$

Caudal (Q)

$$\frac{Volumen}{Tiempo}\left(\frac{5\ litros}{minuto}\right)$$

Densidad animal (carga animal)

$$\frac{Número\ de\ animales}{Área}\left(\frac{14\ \text{pollos}}{m^2}\right)$$

Pendiente(m)

$$\frac{Cambio\ vertical}{Cambio\ horizontal}\left(\frac{2\ m}{3\ m}\right)$$

Rendimiento

$$\frac{Masa}{Área}\left(\frac{120\ \text{qq}}{ha}\right)$$

Conversión Alimenticia

$$\frac{Masa\ de\ alimento\ consumida}{Ganancia\ de\ masa\ diaria}\left(\frac{4\ kg}{2\ kg}\right)$$

Número de semillas por unidad de masa

$$\frac{Cantidad\ de\ semillas}{Masa}\left(\frac{1{,}580\ semillas}{kilogramo}\right)$$

Proporción: Una proporción es una igualdad entre dos razones. Indica que dos relaciones son equivalentes. Por ejemplo, si la razón de 2 a 4 es igual a la razón de 3 a 6, se dice que 2/4 = 3/6, y esto es una proporción. Las proporciones se utilizan para resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa, donde las cantidades varían en la misma proporción. Una proporción suele tener la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Cuando hablamos de proporcionalidad, nos referimos a la relación constante entre dos cantidades que varían de manera conjunta. Existen dos tipos principales de proporcionalidad:

Proporcionalidad directa: Dos cantidades son directamente proporcionales si al aumentar una, la otra también aumenta en la misma proporción, y al disminuir una, la otra también disminuye en la misma proporción. Por ejemplo, si el precio de 1 kilogramo de manzanas es Q2, el precio de 2 kilogramos será Q4, y así sucesivamente.

Proporcionalidad inversa: Dos cantidades son inversamente proporcionales si al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción, y viceversa. Por ejemplo, si 4 personas pueden pintar una casa en 6 horas, 2 personas (la mitad) tardarán el doble de tiempo, es decir, 12 horas, en pintar la misma casa.

1.2. PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES

Esta propiedad dicta que en toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios, tal como se muestra a continuación:

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \times d = b \times c$$

Por ejemplo, si queremos comprobar que la siguiente proporción es cierta: 3 es a 4 así como 15 es a 20; entonces tendremos que multiplicar los extremos (en verde) e igualarlos a la multiplicación de los medios (en azul). Si el resultado es el mismo, entonces sí se cumple la propiedad fundamental de la proporción por lo tanto es cierta.

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

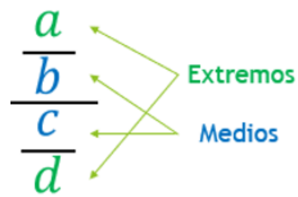
$$3 \times 20 = 4 \times 15$$

Puede observar la multiplicación de los extremos y la de los medios

$$60 = 60$$

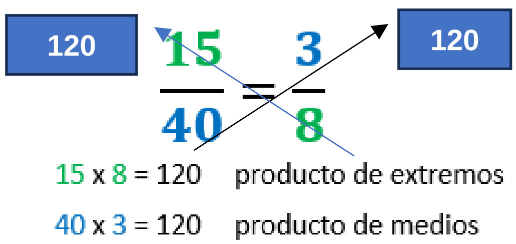
Podemos ver que sí se cumple la igualdad, por lo tanto, podemos afirmar que 3 es a 4 así como 15 es a 20 sí es una proporción.

Una de las dudas principales que pueden surgir en este momento es ¿a qué se refiere con extremos y con medios? Para responder a esto debemos ver a nuestra proporción como si fuera la división de dos fracciones y recordar aquella famosa ley del sándwich, en donde multiplicábamos los extremos y los medios. Entonces observe la siguiente figura y compárela con la figura anterior, vea dónde se encuentra “a” y las otras letras en ambas figuras y vea quiénes se están multiplicando. Podrá observar que “a” multiplica a “d” y que “b” multiplica a “c”.



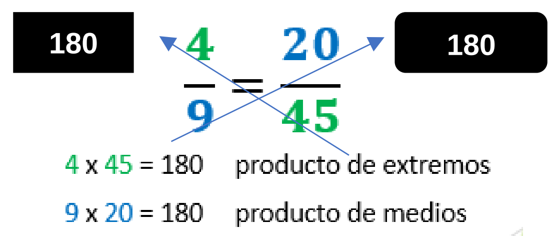
Otros ejemplos: Verifique si las siguientes igualdades son proporcionales:

$$\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$



Sí es proporcional

$$\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$$



Sí es proporcional

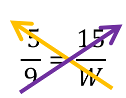
1.3. USO DE PROPORCIONES PARA ENCONTRAR UN VALOR DESCONOCIDO

Las proporciones matemáticas nos permiten calcular valores desconocidos. Gracias al conocimiento de éstas es que han surgido herramientas tan importantes como las reglas de tres, sin embargo, para esta ocasión veremos cómo encontrar un valor que no conocemos utilizando una proporción desde sus aspectos más básicos.

Ejemplo: determine el elemento desconocido en la siguiente proporción: $\frac{5}{9} = \frac{15}{W}$

En este caso podemos ver que existe una proporción que nos dice: 5 es a 9 así como 15 es a W. La interrogante en este caso es ¿cuál debe ser el valor de W para que esta proporción se cumpla? Esto lo podemos realizar de manera intuitiva o bien, de la siguiente manera:

1) Imaginamos o dibujamos con flechas la multiplicación cruzada de los extremos y los medios.



2) Escribimos la letra de la incógnita cuyo valor queremos encontrar, le ponemos un símbolo “=” y creamos una fracción mediante su signo de división.

$$w = \frac{}{}$$

3) En el numerador ponemos la multiplicación de los dos valores cruzados conocidos (flecha morada).

$$w = \frac{9 \times 15}{}$$

4) En el denominador ponemos el otro valor conocido que está cruzado con la incógnita (ver flecha anaranjada).

$$w = \frac{9 \times 15}{5}$$

$\boldsymbol{w = 27}$	**5)** Por último, realizamos las operaciones respectivas y encontramos el valor de W.

De esta manera, podemos decir que el valor de W es igual a 27 y que 5 es a 9 así como 15 es a 27.

Otros ejemplos: encuentre el valor desconocido de las siguientes proporciones:

$$\frac{3}{2} = \frac{a}{6}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{a}{6}$$

$$a = \frac{\quad}{\quad}$$

$$a = \frac{3 \times 6}{\quad}$$

$$a = \frac{3 \times 6}{2}$$

$$\boldsymbol{a = 9}$$

$$\frac{6}{b} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{6}{b} = \frac{3}{2}$$

$$b = \frac{\quad}{\quad}$$

$$b = \frac{6 \times 2}{\quad}$$

$$b = \frac{6 \times 2}{3}$$

$$\boldsymbol{b = 4}$$

1.4. PORCENTAJE

El porcentaje es una forma de expresar una cantidad como una fracción de 100. Se utiliza comúnmente para comparar proporciones o cambios de manera sencilla, por ejemplo, si alguien dice que tiene un 50% de algo, significa que tiene 50 de cada 100 unidades posibles.

El símbolo que representa el porcentaje es "**%**". Así que, en esencia, calcular un porcentaje implica dividir una parte por el total y luego multiplicar el resultado por 100. Por ejemplo, si se tienen 20 manzanas de un total de 50, el porcentaje sería:

$$\left(\frac{20}{50}\right) \times 100 = 40\%$$

Notación	Se lee	Obtenido de	Significado	Valor o equivalencia en decimal	Fracción irreducible
42 %	Cuarenta y dos por ciento	$\frac{42}{100} * 100 = 42\%$	42 partes de 100	$\frac{42}{100} = 0.42$	$\frac{42}{100} = \frac{21}{50}$
120 %	Ciento veinte por ciento	$\frac{120}{100} * 100 = 120\%$	120 partes de 100	$\frac{120}{100} = 1.20$	$\frac{42}{100} = \frac{6}{5}$
0.05 %	Cero punto cero cinco por ciento	$\frac{0.05}{100} * 100 = 0.05\%$	0.05 partes de 100	$\frac{0.05}{100} = 0.0005$	$\frac{42}{100} = \frac{1}{2000}$

Ejemplos:

Determine el número del cual 25 es el 5%

25	**5%**
x	**100%**

$$X = \frac{25 \times 100}{5} = 500$$

25 es el 5% de 500

Encontrar el $\frac{5}{8}$% de 800

800	**100%**
X	**5/8 %**

$$X = \frac{800 \times 5/8}{100} = 5$$

El 5/8% de 800 es 5

¿Qué porcentaje es 109 de 5,000?

5000	**100%**
109	**X**

$$X = \frac{109 \times 100}{5000} = 2.18\%$$

109 ES EL 2.18 % DE 5,000

Tanto por ciento más: Es un porcentaje que está arriba del 100 %. El ejemplo clásico es el impuesto que se le incrementa a los bienes a la hora de definir su precio.

Ejemplo 1.
Cierta institución, exenta del pago del impuesto sobre el valor agregado, IVA (actualmente del 12 %), le compra a la empresa "COMPARTS", accesorios para computadoras por un valor de Q1,792.00.

Determine:

a) La cantidad que la institución le debe pagar a la empresa.
b) El valor que deberá colocarse en la boleta de exención del IVA.

- Como $12\% = \frac{12}{100} = 0.12$, y el IVA está incluido en el precio, entonces.

$$\frac{112}{100} = \frac{1{,}792}{X} \qquad X = \frac{100 \times 1{,}792}{112} = 1{,}600$$

1,792-1,600 =192

Deben cancelarse a la empresa Q1,600 y extender un documento de exención de IVA por Q192.00

Ejemplo 2.
Un refrigerador tiene un precio de Q4,200.00. Si el impuesto fuera del 16% por dicho artículo, ¿cuál debería ser el precio final del refrigerador?

Supuesto: 100%............4 200

Pregunta: 16%............X

Operaciones:

$$\frac{100}{16} = \frac{4200}{?}$$

Operaciones:

$$\frac{16 \times 4200}{100} = \$672.00$$

16% de IVA = $672.00

4 200 + 672 = $4 872.00

Valor del refrigerador más 16% de IVA = $4 872.00

Tanto por ciento menos: Es el porcentaje que está abajo del 100 %. El ejemplo clásico es el descuento.

- ¿Cual será el precio de oferta de un insecticida si el precio normal es de Q200.00 por litro y hay 25% de descuento?

100%- 25% = 75%

Q200.00	100%
X	75%

$$X = \frac{200 \times 75}{100} = Q150.00$$

El precio de oferta del insecticida es de Q150.00

1.5. HOJA DE EJERCICIOS 1: PROPORCIONALIDAD

Encuentre el valor del elemento que falta

1. $\frac{7}{14} = \frac{y}{10}$ 2. $\frac{3}{7} = \frac{z}{28}$ 3. $\frac{y}{5} = \frac{8}{20}$ 4. $\frac{5}{m} = \frac{15}{9}$ 5. $\frac{3}{5} = \frac{12}{m}$

6. ¿Cuál es el 25% de 150?
7. ¿De qué número es 480 es el 30%?
8. ¿Qué porcentaje de 270 es 54?
9. Una tienda de electrodomésticos decide dar 30% de descuento en toda su mercadería, si el precio normal de una televisión es Q6000.00. ¿Cuánto pagará en la caja?
10. Alejandra compro un refrigerador en Q350.00, el precio incluía un 30% de descuento. ¿Cuál era el precio sin descuento?
11. Los audífonos de Liza están valuados en 25% más que los de Karen, si los de Karen tienen un precio de Q600.00. ¿Cuánto costaran los de Liza?
12. En una caja hay 8 cincos azules, 5 rojos y 7 verdes. ¿Cuál es el porcentaje de cincos rojos?
13. Un salón tiene capacidad de 80 alumnos, 20% se presentan puntualmente. ¿Cuántos alumnos se presentan impuntualmente?
14. Un equipo de básquetbol tuvo 30 derrotas durante 80 juegos. ¿Cuál es el porcentaje de victorias?
15. Para aprobar una evaluación que tiene 60 preguntas, Manuel tiene que contestar correctamente 75% de esta evaluación. ¿Cuál es el mínimo de preguntas que deberá contestar correctamente para aprobar esta evaluación
16. Un depósito de leche con capacidad de 800 litros está lleno en dos quintas parte, si se agregan 80 litros más. ¿Qué porcentaje del contenedor se encuentra lleno?
17. Sin una escuela hay 400 alumnos, de los cuales 100 son mujeres. ¿Cuál es el porcentaje de hombres?
18. El precio de una calculadora científica aumento de Q250.00 a Q325.00. ¿Cuál es el porcentaje de incremento?
19. Una tienda anunciaba un artículo con 10% de descuento para un ahorro de Q30.00. ¿Cuál era el precio original?
20. Hoy un artículo tiene un precio de Q90.00. Si el próximo mes aumentar el precio en un 200%. ¿Cuál será el nuevo precio?

Respuesta a los ejercicios pares:

2) 12
4) 3
6) 37.5
8) 20%
10) Q500.00
12) 25%
14) 62.5%
16) 50%
18) 30%
20) Q270.00

1.6. EVALUACIÓN DE PROPORCIONALIDAD

1. Encuentre el valor desconocido de la siguiente proporción: $\frac{90}{9} = \frac{w}{1}$

   a) 1/9 b) 9 c) 10 d) 18

2. ¿Cuál es el 5% de 60?

   a) 3 b) 30 c) 6 d) 60

3. ¿Qué porcentaje representa 15 de 375?

   a) 8% b) 10% c) 5% d) 4%

4. ¿De qué número 43 es el 86%?

   a) 30 b) 50 c) 120 d) 45

5. Una persona compra un artículo en Q300.00 y quiere venderlo para ganar el 20%. ¿A qué precio debe venderlo?

   a) Q360.00 b) Q420.00 c) Q310.00 d) Q400.00

Respuestas de la evaluación:

1) c
2) a
3) d
4) b
5) a

2. OPERACIONES ALGEBRAICAS

El álgebra es una rama de las matemáticas que utiliza símbolos, letras y números para representar relaciones entre cantidades y resolver problemas. Su característica distintiva es el uso de variables, que permiten trabajar con valores desconocidos o generales en lugar de números específicos. Esto hace que el álgebra sea una herramienta poderosa para modelar situaciones del mundo real y para el razonamiento matemático abstracto.

2.1. CONCEPTOS PRINCIPALES DEL ÁLGEBRA

2.1.1. Expresión algebraica

Una expresión algebraica es una combinación de números, variables (letras) y operaciones matemáticas como suma, resta, multiplicación, división y potencias. A diferencia de una ecuación, no tiene un signo igual (=) que relacione dos partes; por lo tanto, no representa una afirmación que deba resolverse, sino más bien una forma de representar cantidades o relaciones.

- **Variable:** Es un símbolo (como x o y) que representa un valor desconocido o cambiante.
- **Constante:** Un número fijo, como 3 o 10.
- **Coeficiente:** es el número que acompaña a una literal o grupo de literales. Por ejemplo: en el término 4x, el coeficiente es "4" y la parte literal es "x". En el término -3xy, el coeficiente es "-3" y la parte literal es "xy".

2.1.2. Términos algebraicos

Un término algebraico puede estar constituido por una constante, una variable o una combinación de ambos multiplicados juntos. Por ejemplo, 10y, $4xy^2z$, $5x$ o 7.

En este tema surgen los **Términos semejantes,** que son aquellos que tienen la misma parte literal (las mismas variables elevadas a los mismos exponentes). Por ejemplo:

- 3x y 5x **son semejantes** porque tienen la misma variable x.
- 2xy y 7xy **son semejantes** porque las variables y sus potencias coinciden.
- 2x y $3x^2$ **no son semejantes** porque los exponentes de x son diferentes.

Entender que son los términos semejantes y saber identificarlos es algo muy importante puesto que nos permiten simplificar expresiones algebraicas. La **Simplificación** es un proceso que nos permite tomar una expresión algebraica más compleja y expresarla de manera más sencilla. Por ejemplo, en lugar de expresar 3x + 5x – 2x (aparentemente un trinomio), la podemos expresar como simplemente 6x (un monomio), la cual es una manera más sencilla y compacta de expresar lo mismo.

Cuando queremos simplificar expresiones algebraicas, sólo podemos hacerlo sumando o restando términos semejantes, para lo cual, sumamos o restamos sus coeficientes y copiamos la parte literal. Por ejemplo:

- 3x y 5x son semejantes, por lo que en un dado caso se podrían sumar para obtener una expresión más simplificada al sumar sus coeficientes y copiar la parte literal, es decir, 3x + 5x = 8x.
- 5xy y −2xy son semejantes, por lo que en ciertos casos se pueden sumar para obtener una expresión más simplificada: 5xy + (-2xy) = 5xy – 2xy = 3xy.

- $8z^2$ y $4z^2$ son términos semejantes, así que, en ciertos casos podríamos restarlos si fuera necesario y el resultado sería una expresión más simple, tal como: $8z^2 - 4z^2 = 4z^2$.
- $7x^2$ y $3x$ no son semejantes porque los exponentes de x son diferentes. Así que en caso de querer sumarlos, por ejemplo: $7x^2 + 3x$, ésta misma expresión sería la más simple que podemos tener: $7x^2 + 3x$. No podemos expresarlo de manera más "compacta" por decirlo de otra manera.

2.1.3. Polinomio

Es una expresión algebraica que consta de varios términos algebraicos. Se denotan por una suma o una resta de varios monomios. Se puede clasificar en:

- **Monomio:** Consta de un sólo término. Por ejemplo 2x.
- **Binomio:** Consta de dos términos. Por ejemplo 2x + 3y.
- **Trinomio:** Consta de tres términos. Por ejemplo: $x^2 - 2x + 4$.
- **Tetranomio:** Consta de cuatro términos. Por ejemplo: $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 1$.

Observe en los ejemplos anteriores que un polinomio es la suma y/o resta de términos que no son semejantes, es decir, ya no podemos presentar de una manera más compacta estas expresiones.

Para ilustrar lo anterior tomemos el siguiente ejemplo:

$$3x^3 + 4x^3 - 5x^3 + 4xy - 8xy - 5y + 2y - 3y^2 - 4y^2$$

En este caso podemos ver un polinomio de 9 términos, pero tiene la característica de que varios de ellos son semejantes entre sí. Entonces, la simplificación nos permitirá representar el mismo polinomio, pero de una manera más compacta y sencilla de entender. Este proceso consiste en sumar todos aquellos términos que sean semejantes. De esta manera nos quedaría:

$$2x^3 - 4xy - 3y - 7y^2$$

Como podemos ver en este ejemplo, el polinomio de nueve términos (nonanomio) en realidad se podía expresar como uno de cuatro términos (tetranomio).

2.2. OPERACIONES ALGEBRAICAS

2.2.1. Suma

Consiste en combinar dos o más polinomios sumando los términos que tienen el mismo grado, es decir, los términos con la misma potencia de la variable.

Ejemplo

Sume los siguientes polinomios: $3x - 2y + 1$; $4y - 2x - 7$

Este ejercicio lo podemos resolver de dos maneras, una vertical y la otra horizontal. A continuación los ejemplos:

Vertical: Colocamos un polinomio debajo del otro, ordenándolos de tal manera que los términos semejantes queden uno debajo del otro.

$$\begin{array}{rrrr} 3x & -2y & + & 1 \\ -2x & +4y & - & 7 \\ \hline x & +2y & - & 6 \end{array}$$

Horizontal: En este caso ordenamos los polinomios uno delante de otro poniendo un signo mas entre los dos. Luego aplicamos las respectivas reglas de jerarquía operativa y sumamos términos semejantes.

$\underbrace{3x – 2y + 1}_{\text{Polinomio 1}}$ **+** ($\underbrace{4y – 2x – 7}_{\text{Polinomio 2}}$) = 3x – 2y + 1 + 4y – 2x – 7 = 3x – 2x – 2y + 4y + 1 – 7 = x + 2y – 6

Ordenamos y sumamos términos semejantes

2.2.2. Resta

Funciona de manera similar a la suma, pero se debe tener cuidado con los signos al restar los términos.

Ejemplo 1:

Realice las siguientes operaciones.

a) Dados los polinomios: A = 10x – 5y – 4 B = 15x + 6y – 4

Opere A – B

10x – 5y – 4 **–** (15x + 6y – 4) = 10x – 5y – 4 **–** 15x **–** 6y **+** 4 = -5x – 11y

Ordenamos los polinomios, uno delante del otro, pero en este caso colocaremos un signo menos antes del segundo, el cual le va a cambiar todo el sentido a dicho polinomio al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación.

Ejemplo 2:

b) 7a + 3b + 6c **–** (2a + 5b – 6c) = 7a + 3b + 6c **–** 2a **–** 5b **+** 6c = 5a – 2b + 12c

2.2.3. Multiplicación

La multiplicación de polinomios consiste en aplicar la propiedad distributiva, multiplicando cada término de un polinomio por cada término del otro. Luego, se simplifican los términos semejantes si es necesario.

Ejemplo 1.

a) $– 4x^2y\ (3z + y^2 – 4xy) = -12x^2yz – 4x^2y^3 + 16x^3y^2$

Ejemplo 2.

b) $(y - 4)(y^2 - 8y + 2) = y^3 - 8y^2 + 2y - 4y^2 + 32y - 8 = y^3 - 12y^2 + 34y - 8$

2.2.4. División

La división de polinomios se realiza utilizando el método de la división larga, que es similar al proceso de división de números, pero con términos algebraicos. El objetivo es dividir el polinomio dividendo entre el divisor y encontrar el cociente y el residuo.

Ejemplo:

Divida el polinomio $2x^3 + 7x^2 + 10x + 8$ entre $x + 2$

Lo primero que hacemos es ordenar los términos de mayor a menor grado aunque en este ejemplo ya estaban ordenados. Luego los ponemos de la siguiente manera:

$$x + 2\,\overline{\big|\,2x^3 + 7x^2 + 10x + 8}$$

Después dividimos el primer término del dividendo dentro del primer término del divisor, o sea $2x^3 \div x = 2x^2$ y lo ponemos arriba

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 \\ \hline x + 2 & 2x^3 + 7x^2 + 10x + 8 \end{array}$$

Posteriormente multiplicamos el término que resultó por el polinomio divisor $2x^2 * (x + 2) = 2x^3 + 4x^2$ y el resultado lo ponemos ordenado en la parte de abajo. Como podrá notar, quedan términos semejantes debajo de términos semejantes.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 \\ \hline x + 2 & 2x^3 + 7x^2 + 10x + 8 \\ & 2x^3 + 4x^2 \end{array}$$

Posteriormente, le cambiamos los signos a dicho resultado.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 \\ \hline x + 2 & 2x^3 + 7x^2 + 10x + 8 \\ & \underline{-2x^3 - 4x^2} \end{array}$$

Luego hacemos la suma algebraica correspondiente tomando en cuenta los signos de cada término.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \\
\hline
x+2 & \cancel{2x^3} + 7x^2 + 10x + 8 \\
 & -\cancel{2x^3} - 4x^2 \\
\hline
 & \qquad\quad 3x^2
\end{array}
$$

Después, bajamos el siguiente término del polinomio que se está dividiendo.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \\
\hline
x+2 & \cancel{2x^3} + 7x^2 + 10x + 8 \\
 & -\cancel{2x^3} - 4x^2 \quad\downarrow \\
\hline
 & \qquad\quad 3x^2 + 10x
\end{array}
$$

Después, volvemos a dividir el primer término del polinomio resultante dentro del primer término del polinomio divisor, es decir: $3x^2 \div x = 3x$ y el resultado lo ponemos en la parte de arriba, seguido del primer término que ya habíamos puesto anteriormente.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x \\
\hline
x+2 & \cancel{2x^3} + 7x^2 + 10x + 8 \\
 & -\cancel{2x^3} - 4x^2 \quad\downarrow \\
\hline
 & \qquad\quad 3x^2 + 10x
\end{array}
$$

Posteriormente, repetimos el proceso anterior multiplicando el término resultante por el polinomio divisor $3x * (x + 2) = 3x^2 + 6x$ y el resultado lo ponemos debajo de sus términos semejantes.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x \\
\hline
x+2 & \cancel{2x^3} + 7x^2 + 10x + 8 \\
 & -\cancel{2x^3} - 4x^2 \quad\downarrow \\
\hline
 & \qquad\quad 3x^2 + 10x \\
 & \qquad +3x^2 + 6x
\end{array}
$$

Luego cambiamos los signos de dicho resultado.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x \\
\hline
x+2 & \cancel{2x^3} + 7x^2 + 10x + 8 \\
 & -\cancel{2x^3} - 4x^2 \quad\downarrow \\
\hline
 & \qquad\quad 3x^2 + 10x \\
 & \qquad -3x^2 - 6x \\
\hline
\end{array}
$$

Después hacemos la suma algebraica correspondiente y repetimos el procedimiento explicado desde el inicio.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x \\
\hline
x+2 & \cancel{2x^3} + 7x^2 + 10x + 8 \\
 & -\cancel{2x^3} - 4x^2 \\
\hline
 & \qquad 3x^2 + 10x \\
 & \qquad -3x^2 - 6x \\
\hline
 & \qquad\qquad 4x + 8
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x \;\; +4 \\
\hline
x+2 & \cancel{2x^3} + 7x^2 + 10x + 8 \\
 & -\cancel{2x^3} - 4x^2 \\
\hline
 & \qquad 3x^2 + 10x \\
 & \qquad -3x^2 - 6x \\
\hline
 & \qquad\qquad 4x + 8 \\
 & \qquad\qquad -4x - 8x \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

En este caso, quedó un residuo de 0, por lo que la división entre estos dos polinomios es exacta.

2.3. EVALUACIÓN DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El valor numérico de una expresión algebraica puede calcularse cuando a cada literal de una expresión se le asigna un valor especifico.

Ejemplo 1.

Si x = 2 ¿Cuál es el valor de la expresión $x^3 + 3x - 1$?

Lo que se realiza es sustituir el valor de x en donde aparece en la expresión

$2^3 + 3 (2) – 1$
8+6 -1
13

Si x = 3 y y= 4 ¿Cuál es el valor de la expresión $5x^2 – 7y$?

Lo que se realiza es sustituir el valor de x y de y en donde aparece en la expresión

$5 (3)^2 – 7 (4)$
5 (9) -28
45-28
23

2.4. HOJA DE EJERCICIOS 2. OPERACIONES ALGEBRAICAS

1. Suma los siguientes polinomios $3x-8y-2z$; $7x+3y+z$
2. ¿Cuál es la suma de $-5m-2n+6$ con $2m+2n-8$?
3. Realiza $(11a-b)+(-8a+c)$
4. Efectúa $(3p-5q-6r)+(2p+3q-2r)+(-12p+4q+r)$
5. Suma $6x^2+3x-2$ con $-x^2+7x+4$
6. Realiza la siguiente operación: $(4a-2b-5c)-(3a-7b-5c)$
7. De $16x^2-7x-8$ restar $6x^2-3x+6$
8. ¿Cuál es el resultado de $(3x^3-5x^2-6x+3)-(2x^3+4x-8)$
9. Restar $8x-3y-6$ de $5x+4y-1$
10. Realiza $(a^2+a-1)-(a^2-a+1)$
11. Realiza $(-abc)(3ac)$
12. Resuelve $5x(3x+6)$
13. Efectúa $(x-7)(x+2)$
14. Obtén el resultado de $(x+y)(x^2+2xy+y^2)$
15. ¿Cuál es el resultado de $(a+b-c)(a-b+c)$
16. Efectúa la siguiente operación $\frac{3x^2-5x+2}{3x-2}$
17. Resuelve la siguiente operación $(5a^2+8ab-21b^2)\div(a+3b)$
18. Resuelve $2x^3-4x-2 / 2x+2$
19. Obtén el resultado de $(-15x^2+22xy-8y^2)\div(-3x+2y)$
20. Realiza $(x^4-9x^2+x+3):(x+3)$
21. Si $x=5$ ¿Cuál es el valor de la expresión x^2-25?
22. Si $y=2$ ¿Cuál es el valor de expresión y^2+2y+1?
23. Si $x=4$ ¿Cuál es el valor de la expresión x^2-2x+1?
24. Si $x=2$ y $y=3$ ¿Cuál es el valor de la expresión $x^2+2xy+y^2$?
25. Si $x=6$ y $y=5$ ¿Cuál es el valor de la expresión x^2-y^2?

Respuesta a los ejercicios pares:

2) $-3m-2$	4) $-7p+2q-7r$	6) $a+5b$	8) $x^3-5x^2-10x+11$
10) $2a-2$	12) $15x^2+30x$	14) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	16) $x-1$
18) x^2-x-1	20) x^3-3x^2+1	22) 9	24) 25

2.5. EVALUACIÓN DE OPERACIONES ALGEBRAICAS

1. ¿Cuál es el resultado de operar $(4x^2-5x+8) + (5x^2+3x-8)$?

   a) $9x^2-2x+16$ b) $9x^2+2x-16$ c) $x^2 +16$ d) $9x^2-2x$

2. ¿Qué se obtiene de realizar la siguiente operación? $(x^3+5xy-y^3) – (2x^3-xy-y^3)$

   a) x^3-4xy b) $3x^3+4xy-2y^3$ c) $-x^3+4xy$ d) $3x^3-4xy+2y^3$

3. al efectuar la siguiente operación $(3x^2+4)(5x^2-4)$ ¿Cuál es el resultado?

   a) $15x^2+8x^2-16$ b) $15x^2-8x^2+16$ c) $15x^2 -16$ d) $15x^2+16$

4. ¿Cuál es el resultado de operar $(45x^6-28x^4-9x^2-56) \div (5x^2-7)$?

   a) $7x^2+8x-5$ b) $9x^4+7x^2+8$ c) $8x^2+9x+7$ d) $4x^4-5x^2+8$

5. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? $\frac{x^5-6x^3+5x^2+9x-15}{x^3-3x+5}$

   a) x^2-3 b) $x^4+5x^3-7x^2+8x-3$ c) $x^4+5x^3-7x^2+8x-3$ d) x^3+x-4

Respuesta de la evaluación:
1. d
2. c
3. a
4. b
5. a

3. FACTORIZACIÓN ALGEBRAICA

La factorización algebraica es el proceso de escribir una expresión algebraica como un producto de factores más simples. Es útil para simplificar expresiones, resolver ecuaciones y entender mejor la estructura de los polinomios. Hay varias técnicas de factorización dependiendo del tipo de polinomio.

Los **factores** de una expresión algebraica, **son los términos**, ya sean números y/o letras, o que multiplicados entre sí dan como producto la primera expresión (polinomio original).

Así, por ejemplo, si multiplicamos **a** por **a + b** podemos ver que:

$$a(a+b)=a^2+ab$$

Da como producto $\mathbf{a^2 + ab}$, entonces, los **factores** de esta expresión algebraica son **a** y **(a + b)**.

También debemos saber que no todos los polinomios algebraicos se pueden factorizar ya que al igual que en los números primos que sólo son divisibles por ellos mismos y por 1, hay expresiones algebraicas que también sólo son divisibles por ellas mismas y por 1.

Ejemplos:

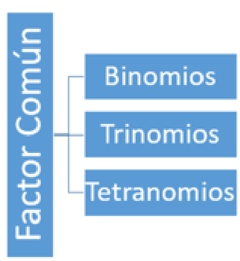
1. (x + y) solamente es divisible entre (x + y) y entre 1.
2. **ax + by + cz** no se puede factorizar ya que solo es divisible por **ax + by + cz** y por **1**.

Se puede factorizar un polinomio algebraico utilizando los casos de factorización que se darán en la primera unidad o bien con división sintética.

Pasos para poder factorizar

Los pasos para factorizar un polinomio algebraico son:

1. Sacar factor común si existe.
2. Contar sus términos para saber si es un binomio, trinomio o tetranomio. Esto ayudará a determinar qué caso de factorización es, porque cada grupo de polinomios tienen sus propios casos de factorización.



3. Si es un binomio los casos pueden ser:
    a. Diferencia de cuadrados
    b. Diferencia de cubos
    c. Suma de cubos
4. Si es un trinomio los casos pueden ser:
    a. Trinomio cuadrado perfecto
    b. Trinomio de la forma $x^2 + Bx + C$ (segundo caso de los trinomios)

c. Trinomio de la forma $Ax^2 + Bx + C$(tercer caso de los trinomios)
d. Completación de trinomio cuadrado perfecto. Este es un caso especial puesto que puede corresponder inicialmente a una suma de cuadrados de un binomio, la cual, se puede convertir en un trinomio.

5. Si es un tetranomio los casos pueden ser:
   a. Factor común por agrupación de términos
   b. Cubo perfecto
   c. Combinación de casos

3.1. FACTOR COMÚN

Es el máximo común divisor (M.C.D) de los términos que la componen. El MCD entre dos o más números ya sabemos cómo encontrarlos y son letras, es la letra común con su menor exponente (factores comunes con su menor exponente).

Recuerde que siempre debe primero verificar si el polinomio tiene factor común. Se le conoce como caso general porque puede factorizar cualquier polinomio sin importar la cantidad de términos que tenga, siempre y cuando exista el factor común.

Ejemplo 1:

Factorizar $\boldsymbol{x^2y + x^2z}$

Identificamos el factor común de la expresión, el cual es $\boldsymbol{x^2}$, entonces dividimos cada uno de los términos de la expresión dentro de este factor.

$\boldsymbol{x^2y \div x^2 = y}$
$\boldsymbol{x^2z \div x^2 = z}$

Entonces escribimos la factorización:

$$x^2y + x^2z = \underbrace{x^2}_{\text{Factor común}}(y + z)$$

Ejemplo 2:

Factorizar $\boldsymbol{8m^2 - 12mn}$

Identificamos el factor común de la expresión, el cual es $\boldsymbol{4m}$, entonces dividimos cada uno de los términos de la expresión dentro de este factor.

$\boldsymbol{8m^2 \div 4m = 2m}$
$\boldsymbol{12mn \div 4m = 3nz}$

Entonces escribimos la factorización:

$$8m^2 - 12\,mn = 4m(2m - 3n)$$

Ejemplo 3:

Factorizar 36a +24b – 12c

Identificamos el factor común, que en este caso es 12, porque el mcd de 26, 24 y 12 es 12.

De esta manera la expresión factorizada es: 12(3a + 12b – c)

Notas

a) Una forma de comprobar que el resultado sea correcto es multiplicar el factor común con cada uno de los términos del polinomio y verificar que el resultado sea el polinomio original.
b) Recuerde que el polinomio que queda entre paréntesis debe de tener la misma cantidad de términos que el polinomio original.

3.2. FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS

3.2.1. Diferencia de cuadrados

Características para ser una diferencia de cuadrados:

1. Los dos términos deben tener raíz cuadrada exacta.
2. A los dos términos los separa un signo menos.

Ejemplo 1:

Factorizar 25 – 36 x^2

$$\underset{5}{\underset{\downarrow}{25}} - \underset{6x}{\underset{\downarrow}{36x^2}} = (5+6x)(5-6x)$$

Otros ejemplos: Factorizar las siguientes expresiones:

1. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

2. $9y^2 - 4x^2 = (3y+2x)(3y-2x)$

3. $x^2 - 7 = No\ se\ puede\ factorizar\ porque\ 7\ no\ tiene\ raiz\ cuadrada\ exacta.$

4. $27x^2 - 3 = 3(9x^2 - 1) = 3(3x-1)(3x+1)$

5. $x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x+2)(x-2)(x^2+4)$

3.2.2. Suma de cubos

Características para ser una suma o diferencia de cubos:

1. Los dos términos deben de tener raíz cúbica exacta.
2. El signo que separa a los dos términos puede ser mas (+) o menos (-)

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Para factorizar la suma de dos términos elevados al cubo, se descompone en dos factores, donde:

- El primer factor es la suma de sus raíces cúbicas.
- El segundo factor es el cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces mas el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplos:

1. Factorizar $a^3 + 27$.

- La raíz cubica de a^3 es a, y de 27 es 3.

- Según la fórmula sería, $(a + 3)\ (a^2 - a\ (3) + (3)^2)$.

$$a^3 + 27 = (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$$

2. $8x^2 + x^2 y^3 = \ x^2 (8 + y^3)$

$x^2 (2 + y)\ (4 - 2y + y^2)$

3. $1 + y^{6m} = (1 + y^{2m}) \quad (1 - y^{2m} + y^{4m})$

4. $1 + x^6 = (1 + x^2)\ (1 - x^2 + x^4)$

3.2.3. Diferencia de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Para factorizar la diferencia de dos términos elevados al cubo, se descompone en dos factores donde:

- El primer factor es la diferencia de sus raíces cúbicas.
- El segundo factor es el cuadrado de la primera raíz, mas el producto de las dos raíces, mas el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplos:

1. Factorizar $x^3 - 125$.

- La raíz cubica de x^3 es x, y de 125 es 5.

- Según la fórmula sería, $(x - 5)(x^2 + x(5) + (5)^2)$.

$$x^3 - 125 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

2. $1 - x^6$ En una diferencia de cubos cuando tenemos polinomios como el presente ejemplo,

PRIMERA FORMA:

$1 - x^6 = (1 - x^3)(1 + x^3)$ Primero la diferencia de cuadrados

$(1 - x)(1 + x + x^2)(1 + x)(1 - x + x^2)$ Luego como una diferencia y suma de cubos

3.3. FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS

3.3.1. Trinomio cuadrado perfecto

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Requisitos y características para que sea un trinomio cuadrado perfecto:

1. Debe estar ordenado en forma ascendente o descendente
2. Ya ordenado, los signos deben ser + + + o bien + - +
3. Ya ordenado, el primer y tercer término del trinomio deben tener raíz cuadrada exacta.
4. Se debe de comprobar que el producto de la raíz del primer término por la raíz del tercer término por 2 sea igual al segundo término del trinomio.

Ejemplo:

- Factorizar $4x^2 - 12xy + 9y^2$

Recuerda que el signo del segundo término es el que determina el signo del binomio.

$$\underbrace{4x^2}_{2x} - 12xy + \underbrace{9y^2}_{3y} = (2x - 3y)^2$$

Segundo termino: 2 (2x) (3y) = 12xy

3.3.2. Trinomio de la forma $x^2 + Bx + C$

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

Tal que $m + n = b$ y $m \cdot n = c$

Requisitos y características para que sea un trinomio de la forma $x^2 + Bx + C$:

1. Debe de estar ordenado en forma ascendente o descendente (preferible)
2. El coeficiente del primer término es 1
3. El primer término tiene raíz cuadrada exacta
4. El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente que es la mitad que el exponente del primer término, y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.
5. El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo término, y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

1) Factorizar $x^2 + 9x + 14$.

El trinomio se descompone en dos binomios, donde el primer término de ellos será la raíz cuadrada de x^2, o sea x.

Cuando el **segundo y tercer término del trinomio son positivos**, ambos binomios tendrán **signo positivo**.

Los segundos términos de los binomios serán dos números que sumados den 9 y multiplicados den 14.

$$x^2 + \underbrace{9}_{7+2}x + \underbrace{14}_{7 \cdot 2} = (x+7)(x+2)$$

3) Factorizar $m^2 + 5m - 14$.

El trinomio se descompone en dos binomios, donde el primer término de ellos será la raíz cuadrada de m^2, o sea m.

Cuando el **segundo término del trinomio es positivo y tercer término negativo**, los binomios tendrán **signo destinos, donde el número de mayor valor absoluto será positivo**.

Los segundos términos de los binomios serán dos números que sumados den 5 y multiplicados den - 14.

$$m^2 + \underbrace{5}_{7+(-2)}m - \underbrace{14}_{7 \cdot -2} = (m+7)(m-2)$$

3.3.3. Trinomio de la forma $Ax^2 + Bx + C$

Requisitos y características para que sea un trinomio de la forma $Ax^2 + Bx + C$:

1. Debe de estar ordenado en forma ascendente o descendente (preferible).
2. **El coeficiente del primer término es diferente de 1 y jamás es cero.**
3. La letra del primer término tiene raíz cuadrada exacta y generalmente el coeficiente no tiene raíz cuadrada exacta.
4. El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente que es la mitad que el exponente del primer término, y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.
5. El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo término, y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

A. Método clásico o tradicional

Factorizar $20x^2 + 7x - 6$.

Multiplicamos el trinomio por el coeficiente de x^2 que es 20 y dejamos solamente indicado el producto de 20 por 7 x, nos queda;

$$400x^2 + 20 \cdot (7x) - 120$$

Pero 400 $x^2 = (20x)^2$ y 20 (7x) = 7 (6x), podemos escribir el trinomio de la siguiente forma;

$$(20x)^2 + 7(20x) - 120$$

<u>***Ahora, factorizamos como aprendiste en el caso anterior, repasemos;***</u>

El trinomio se descompone en dos binomios, donde el primer término de ellos será la raíz cuadrada de $(20x)^2$, o sea 20 x.

Cuando el **segundo término del trinomio es positivo y tercer término negativo**, los binomios tendrán **signo destinos, donde el número de mayor valor absoluto será positivo**.

Los segundos términos de los binomios serán dos números que sumados den 7 y multiplicados den - 120.

$$(20x)^2 + \underbrace{7}_{\boxed{15 + (-8)}}(20x) \underbrace{- 120}_{\boxed{15 \cdot (-8)}} = (20x + 15)(20x - 8)$$

$$\frac{5(4x+3)4(5x-2)}{20}$$

$$\frac{\cancel{5}(4x+3)\cancel{4}(5x-2)}{\cancel{5}\,(\cancel{4})}$$

$$(4x+3)\,(5x-2)$$

B. Método de tijeras o aspa simple

$$20x^2 + 7x - 6$$

TIJERAS:

4x	+ 3	=	15 x
5x	– 2	=	- 8x
$20x^2$ –	6	=	-7x

RESPUESTA: (4X+3) (5X-2)

3.4. FACTORIZACIÓN DE TETRANOMIOS

3.4.1. Factor común por agrupación de términos

Factoriza

$3x^2 + 2x + 15x + 10$

-Agrupa:

$(3x^2 + 2x) + (15x + 10)$

-Saca factor común 1 vez en cada término:

$x(3x + 2) + 5(3x+2)$

-Saca factor común por 2 vez y listo:

$(3x+2)(x+5)$

Pasos para determinar si es factor común por agrupación de términos

1. Revisar si los 4 términos están ordenados (generalmente si lo están)
2. Descartar un cubo perfecto
3. Generalmente ninguno de los 4 términos tiene raíz cubica exacta
4. Revisar si ya ordenados se pueden agrupar los dos primeros términos y los dos segundos términos
5. Los dos paréntesis generalmente tiene factor común
6. Debe de quedar un factor común dentro de los dos paréntesis
7. Si ya ordenado el tercer termino es negativo se debe de tener cuidado

am + bm + an + bn.

$$am + bm + an + bn =$$

$$= (am + bm) + (an + bn)$$

$$= \underbrace{m(a+b) + n(a+b)}_{\text{Binomio común}}$$

$$= \boxed{(a+b)(m+n)}$$

$$am + bm + an + bn$$

$$\boxed{am + an + bm + bn}$$

$$= (am + an) + (bm + bn)$$

$$= a(m + n) + b(m + n)$$

Binomio común

$$= \boxed{(m + n)(a + b)}$$

$$6m - 9n + 21nx - 14mx =$$

$$= (6m - 9n) + (21nx - 14mx)$$

$$= 3(2m - 3n) + 7x(3n - 2m)$$

$$= 3(2m - 3n) - 7x(-3n + 2m)$$

$$= 3(2m - 3n) - 7x(2m - 3n)$$

Binomio común

$$= \boxed{(2m - 3n)(3 - 7x)}$$

$$6m - 9n + 21nx - 14mx =$$

$$\boxed{6m - 14mx - 9n + 21nx}$$

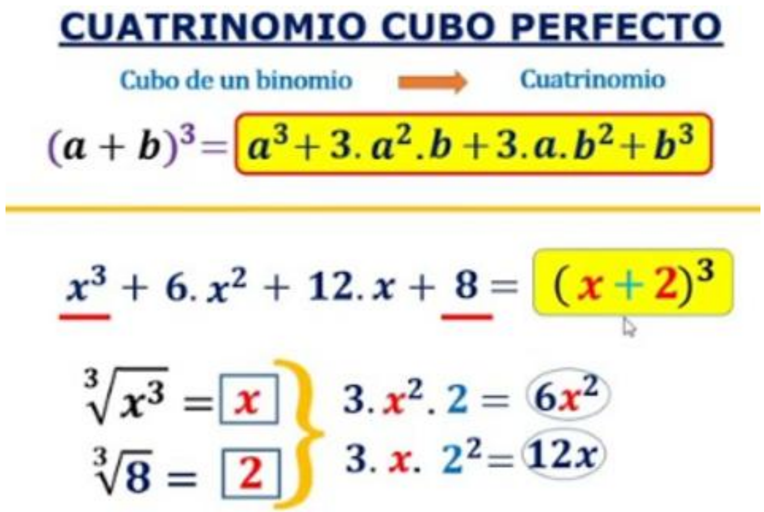
$$= (6m - 14mx) - (9n - 21nx)$$

$$= 2m(3 - 7x) - 3n(3 - 7x)$$

Binomio común

$$= \boxed{(3 - 7x)(2m - 3n)}$$

3.4.2. Tetranomio cubo perfecto



Pasos para determinar si es cubo perfecto.

1. El tetranomio debe de estar ordenado en forma ascendente o en forma descendente. Si hay dos letras una está ordenada en forma descendente y otra en forma ascendente.
2. Ya ordenado se ven los signos que puede ser: + + + + o + - + -
3. Ya ordenado el primero y el cuarto termino tienen raíz cubica exacta
4. Se verifica que tres veces el producto de la raíz cúbica del primero al cuadrado, por la raíz cúbica del cuarto da el segundo término
5. Se verifica que el tercer término debe ser tres veces el producto de la raíz cubica del primero por el cuadrado de la raíz cúbica del cuarto.

Factorizar $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

la raíz cubica de a^3 es **a**, y la raíz cubica de 1 es **1**

Segundo término: $3(a)^2\,(1) = \mathbf{3a^2}$.

Tercer término: $3(a)(1)^2 = \mathbf{3a}$.

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$$

Factorizar $2x^3-12x^2+24x-16$

Primero obtenemos factor común en este caso es 2

$2\ (x^3-6x^2-12x-8)$ Vemos que el tetranomio está ordenado en forma descendente (otra opción es que este ordenado en forma ascendente). Vemos que los signos son alternos (+ - + -), luego obtenemos la raíz cubica del primero y del cuarto termino que son x y 2 respectivamente.

Finalmente, al revisar que $3(x)^2\ 2 = 6x$ y que $3 \times (2)^2 = 12x$ nos dan el segundo y tercer término respectivamente.

$2\ (x-2)^3$

Factorizar $1 + 12\ a^2b^2 – 6ab – 8\ a^3b^3$

Podemos observar que el tetranomio no está ordenado solo con ver los signos que si existen negativos deben de ir alternos empezando con el signo positivo en el primer término si esta ordenado en forma ascendente.

$1 -6ab + 12\ a^2b^2 – 8\ a^3b^3$

Vemos que el primer y cuarto término tienen raíz cubica exacta que son 1 y 2ab respectivamente y al hacer la comprobación del tercer termino ($3\ (1)^2\ (2ab)= 6\ ab$ y cuarto término ($3\ (1)\ (2ab)^2= 12\ a^2b^2$

$(1-2ab)^3$

3.5. HOJA DE EJERCICIOS 3: FACTORIZACIÓN ALGEBRAICA

Factorice completamente las siguientes expresiones algebraicas:

1. $3a^3-a^2$
2. $9x^2+6x+3$
3. $25b^2+35b^4-45b^8$
4. $16x^3y^2-8x^4y-24x^2y^3-40xy^4$
5. $x^5-x^4+x^3-x^2+x$
6. $2x^2-18$
7. $100-16x^2$
8. $4a^4-9b^2c^2$
9. a^4-b^4
10. $49x^2-64y^2$
11. a^3-64b^3
12. $8x^3y^3+27$
13. $3y^3+375$
14. $8s^3-125t^6$
15. $1-216m^9$
16. $a^2-8a+16$
17. $4x^2-20xy+25y^2$
18. $2m^2+4m+2$
19. $a^2+18a+81$
20. $100a^4-60a^2b+9b^2$
21. $x^2+11x+24$
22. $m^2-13m+30$
23. $x^2-7x-18$
24. $x^2+xy-20y^2$
25. $a^2-16a-36$
26. $6x^2-7x-3$
27. $8x^4-19x^2+6$
28. $2b^2+29b+90$
29. $20x^2+x-1$
30. $4n^2+15n+9$
31. $a^2+ab+ax+bx$
32. $x^3-3x^2-4x+12$
33. $5ru+10vr+2ut+4vt$
34. $2x^2y+xy-2xz-z$
35. x^3-2x^2+4x-8
36. $2x^3-12x^2+24x-16$
37. $64x^9-125y^{12}-240x^6y^4+300x^3y^8$
38. $125x^3+75x^2+15x+1$
39. $8a^3b^3-12a^2b^2+6ab-1$
40. $27-27x+9x^2-x^3$

Respuesta a los ejercicios pares:

2) $3(3x^2+2x+1)$
4) $8xy(2x^2y-x^3-3xy^2-5y^3)$
6) $2(x-3)(x+3)$
8) $(2a^2-3bc)(2a^2+3bc)$
10) $(7x+8y)(7x-8y)$
12) /2xy+3) $(4x^2y^2-6xy+9)$
14) $(2s-5t^2)(4s^2+10st^2+25t^4)$
16) $(a-4)^2$
18) $2(m+1)^2$
20) $(10a^2-3b)^2$
22) $(m-10)(m-3)$
24) $(x+5y)(x-4y)$
26) $(3x+1)(2x-3)$
28) $(2b+9)(b+10)$
30) $(4n+3)(n+3)$
32) $(x-3)(x+2)(x-2)$
34) $(2x+1)(xy-z)$
36) $2(x-2)^3$
38) $(5x+1)^3$
40) $(3-x)^3$

3.6. EVALUACIÓN DE FACTORIZACIÓN ALGEBRAICA

1. Al factorizar completamente el siguiente polinomio $9x^2-6x+1$ el resultado correcto es:

   a) $(3x+1)^2$ b) $(3x+1)(3x-1)$ c) $(3x-1)^2$ d) $(3x+1)(3x+1)$

2. Si factorizo completamente $6x^4y^5-8x^3y^6$ tenemos el resultado siguiente:

   a) $2x^3y^5(3x-4y)$ b) $2x^4y^6(xy-4xy)$ c) $2x^3y^5(3-4y)$ d) $2x^3y^5(3x-4)$

3. Al factorizar completamente $21x^4+91x^3-12x-52$ el resultado correcto son los siguientes factores:

   a) $(7x^3-26)$ $(3x+2)$ b) $(3x^3-2)(2x+26)$ c) $(3x+13)(7x^3-4)$ d) $(7x-4)(3x^3+13)$

4. Si se factora completamente el polinomio algebraico $169x^2-9y^2$ tenemos el resultado siguiente:

   a) $(3y-13x)((3y+13x)$ b) $(3y-13x)(3y-13x)$ c) $(13x+3y)(13+3y)$ d) $(13x-3y)(13x+3y)$

5. El resultado de factorizar completamente x^2+9 es:

   a) $(x+3)(x-3)$ b) x^2+9 c) $(x+3)(x+3)$ d) $(x-3)(x-3)$

6. Si factorizamos completamente al polinomio $216m^3-n^3$ el resultado es:

   a) $(6m-n)(36m^2+6mn+n^2)$ b) $(6m-n)(36m^2-6mn+n^2)$ c) $(6m-n)^3$ d) $(6m+n)^3$

7. El resultado de factorizar completamente a $9x^2-48x+63$ es:

   a) $(3x-8)^2$ b) $(3x-9)(3x+7)$ c) $(3x+8)^2$ d) $3(x-3)(3x-7)$

8. Al factorizar completamente el siguiente polinomio $125x^3+225x^2y^3+135xy^6+27y^9$ el resultado es:

   a) $(5x+3y)^3$ b) $(5x-3y)^3$ c) $(5x-3y)^2$ d) $(5x+3y)^2$

9. El resultado de factorizar completamente a $x^2-24x+140$ es:

   a) $(x+14)(x+10)$ b) $(x-14)^2$ c) $(x-10)(x-14)$ d) $(x+14)^2$

10. Si se factora el siguiente polinomio algebraico x^2+x+1 el resultado es:

    a) x^2+x+1 b) $(x+1)^2$ c) $(x+1)(x+1)$ d) $(x+1)(x+1)$

Respuestas de la evaluación:

1. c
2. a
3. c
4. d
5. b
6. a
7. d
8. b
9. c
10. a

4. ECUACIONES

4.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE ECUACIONES

4.1.1. Ecuación

Es una igualdad en donde existen una o más incógnitas. Ejemplos:

a) $2x + 12 = 0$
b) $x^2 = 9$
c) $x + y = 4$
d) $8 + 2 = 10$ Esta es una igualdad, pero no es una ecuación.

4.1.2. Grado de una ecuación

Es el mayor exponente de la incógnita, cuando la ecuación tiene una sola incógnita. El grado de una ecuación indica el número máximo de soluciones de una ecuación. Ejemplos:

a) $2x = 8$ Grado 1 o de primer grado. Esto indica que tiene una solución y es una ecuación lineal.
b) $x^2 = 9$ Segundo grado. Indica que tiene dos soluciones y es una ecuación cuadrática.

4.1.3. Raíces o solución de una ecuación

Es el valor o los valores numéricos que al sustituir o sustituirlos en la incógnita de la ecuación original hacen verdadera la igualdad. Ejemplo:

En el caso de la ecuación $2x = 8$, la raíz o solución de dicha ecuación es x = 4, porque este valor provoca que la igualdad se cumpla. Esto lo podeos comprobar al sustituir el valor de x en la ecuación, así:

$$2x = 8$$
$$2(4) = 8$$
$$8 = 8$$

Como observamos, la igualdad se cumple, por lo tanto podemos afirmar que efectivamente el valor de x es 4.

4.1.4. Conjunto solución de una ecuación

Es el valor o los valores numéricos que resuelven la ecuación. Ejemplo:

En el caso de la ecuación $x^2 = 9$, las raíces o conjunto solución de dicha ecuación son 3 y -3 porque:

$(3)^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$
$9 = 9$ y $9 = 9$

4.2. PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES

4.2.1. Propiedad reflexiva

La propiedad reflexiva en las ecuaciones establece que cualquier cantidad es igual a sí misma. Matemáticamente, se expresa como: a = a

Esto significa que una variable, número o expresión siempre es igual a sí misma. Esta propiedad es fundamental en matemáticas porque sirve como base para muchas operaciones y pruebas lógicas.

Tenemos que a = b sí y sólo sí b = a

Por ejemplo:

a) $5x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 5x + 10$
b) $y = 2x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 4 = y$

4.2.2. Propiedad uniforme de las ecuaciones

Lo que hacemos de un lado de la ecuación también lo hacemos del otro lado exactamente igual.

Para todo a, b, c ∈ R se cumple que:

1. Si a = b, entonces

$$a + c = b + c$$

Observe que se sumó c en ambos lados de la ecuación, donde c representa cualquier valor numérico o algebraico.

2. Si a = b, entonces

$$a - c = b - c$$

Observe que se restó c en ambos lados de la ecuación, donde c representa cualquier valor numérico o algebraico.

3. Si a = b, entonces

$$a \times c = b \times c$$

Observe que se multiplicó por c en ambos lados de la ecuación, donde c representa cualquier valor numérico o algebraico.

4. Si a = b, entonces

$$a \div c = b \div c$$

Observe que se dividió entre **c** en ambos lados de la ecuación, donde c representa cualquier valor numérico o algebraico.

5. Si a = b, entonces

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$

Observe que se sacó la raíz enésima en ambos lados de la ecuación.

6. Si a = b, entonces

$$(a)^n = (b)^n$$

Observe que se elevó a la enésima potencia ambos lados de la ecuación.

La aplicación de estas propiedades es importante para poder resolver ecuaciones (encontrar la o las soluciones de éstas). Por ejemplo:

Resuelva las siguientes ecuaciones y encuentre el valor de x que las hace válidas.

Ejemplo 1

$$\boldsymbol{x - 7 = 0}$$

El objetivo es despejar x, entonces vamos a dejar "sola" esta variable, con signo positivo y con exponente uno en cualquier lado de la ecuación.

$x - 7 = 0$	Para esto, tenemos que quitar el 7 sumando este valor en ambos lados.
$x - 7 + 7 = 0 + 7$	Realizamos las operaciones que quedan
$\boldsymbol{x = 7}$	De esta manera ha quedado resuelta la ecuación.

Ejemplo 2

$$\boldsymbol{x + 3 = 0}$$

$x + 3 = 0$	Para lograr el objetivo, tenemos que eliminar el 3 restando este valor en ambos lados.
$x + 3 - 3 = 0 - 3$	Realizamos las operaciones que quedan
$\boldsymbol{x = -3}$	De esta manera ha quedado resuelta la ecuación.

Ejemplo 3

$$\boldsymbol{x/5 = 2}$$

$\frac{x}{5} = 2$	Para esto, tenemos que eliminar el 5 multiplicando por este valor en ambos lados.
$\frac{x}{5} \times 5 = 2 \times 5$	Realizamos las operaciones que quedan
$\boldsymbol{x = 10}$	De esta manera ha quedado resuelta la ecuación.

Ejemplo 4

$$\boldsymbol{3x = 15}$$

$3x = 15$	Para esto, tenemos que quitar el 3 dividendo entre este valor en ambos lados.
$3x \div 3 = 15 \div 3$	Realizamos las operaciones que quedan
$\boldsymbol{x = 5}$	De esta manera ha quedado resuelta la ecuación.

Nota: Generalmente no se debe de multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación entre una expresión algebraica o alfanumérica, porque al hacerlo es posible que se eliminen soluciones de la ecuación.

Ejemplo 5

$$\boldsymbol{x^2 - x = 0}$$

$x^2 - x = 0$ Podríamos comenzar a resolver esta ecuación sumando x en ambos lados.

$x^2 - x + x = 0 + x$

$x^2 = x$ Entonces podríamos dividir entre x ambos lados

$\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$

$\boldsymbol{x = 1}$ **Entonces este sería el resultado, sin embargo, debido a que dividimos entre x hemos perdido una posible solución a este ejercicio.**

La forma correcta de resolver este ejercicio, cuando tenemos ecuaciones cuadráticas, es igualarla primero a cero y después factorizar o usar la fórmula de vieta para encontrar los valores que resuelven la ecuación. De esta manera queda resuelta así:

$x^2 - x = 0$ Igualamos a 0

$x(x-1) = 0$ Factorizamos. En este caso sacamos el factor común "x".

A cada factor lo igualamos a cero para encontrar los dos valores de x que resuelven esta ecuación:

$$x(x-1) = 0$$

$$\boldsymbol{x = 0}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 0}$$

$$x - 1 = 0$$
$$x - 1 + 1 = 0 + 1$$
$$\boldsymbol{x = 1}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 1}$$

De esta manera, podemos ver que hay dos valores de x. El primero es cero y el segundo es uno.

Ejemplo 6

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{x} = 2}$$
$$\boldsymbol{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = (2)^3}$$
$$\boldsymbol{x = 8}$$

Ejemplo 7

$$x^2 - 25 = 0$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{25}$$
$$\boldsymbol{x = \pm 5}$$

Como puede observarse, existen dos resultados, uno es +5 y el otro es -5 (recuerde que una raíz par tiene dos resultados).

4.3. ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Posibles soluciones de una ecuación lineal con una incógnita:

a) Una sola solución
b) Ninguna solución
c) Infinitas soluciones

Determine el conjunto solución de las ecuaciones lineales con una incógnita que a continuación se proponen:

Ejemplo 1

$$(x-2)\,(4x+1) \;-\; (2x+3)^2 = 8$$

$$4x^2-7x-2-(4x^2+12x+9)=8$$

$$\cancel{4x^2}-7x-2-\cancel{4x^2}-12x-9=8$$

$$-19x-\cancel{11}+\cancel{11}=8+11$$

$$-19x=11+8$$

$$-19x=19$$

$$-19x/-19=19/-19$$

$X=-1$

Verificar: Comprobar, sustituir $x=-1$

$$(x-2)\,(4x+1) \;-\; (2x+3)^2 = 8$$

$$(-1-2)\,[4(-1)+1)]-(2(-1)+3)^2=8$$

$$(-3)\,(-3)-(-2+3)^2=8$$

$$9-(1)^2=8$$

$8=8$

Ejemplo 2

$$2x-3\,(4-x)=5x+2$$

$$2x-12+3x=5x+2$$

$$\cancel{5x}-12=\cancel{5x}+2$$

$$-12\neq 2$$

La ecuación no tiene solución

Ejemplo 3

$$6\;(2-x)=2\,(-3x+6)$$

$$\cancel{12}-\cancel{6x}=-\cancel{6x}+\cancel{12}$$

$0=0$

La ecuación tiene infinitas soluciones

Ejemplo 4

$$5x-4+14x-19=18x+7x-16+23$$

$$19x-23=25X+7$$

$$19x-23-19x=25X+7-19x$$

$$-23=6X+7$$

$$-23-7=6X+7-7$$

$$-23-7=6X$$

$$-30/6=6X/6$$

$-5=x$

4.4. ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

Son ecuaciones de la forma general $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

Para resolver las ecuaciones cuadráticas se pueden utilizar los siguientes métodos:

1. **Por factorización**
2. **Por la fórmula General o fórmula de Vieta**

Todas las ecuaciones cuadráticas deben estar igualadas a cero para poder resolver.

Las posibles soluciones de una ecuación cuadrática con una incógnita son:

- **a) Dos soluciones distintas**
- **b) Una solución de multiplicidad dos (doble o repetida)**
- **c) No tiene solución en los números reales**

4.4.1. Por factorización

No todas las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver por este método. Se utiliza la propiedad del elemento neutro de la multiplicación.

(a x b = 0 ↔ a= 0 V b =0)

Los casos de factorización que se pueden utilizar son:

1. Factor común (FC)
2. Diferencia de cuadrados (DC)
3. Trinomio cuadrado perfecto (TCP)
4. Trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$
5. Trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

Ejemplo 1.

- **x^2-49 = 0**
    - (x+7) (x-7) = 0
    - X+7-7 = 0 -7 o x-7+7= 0 +7
    - **X= -7 o x=7**
- Comprobar:
- X= 7
    - x^2-49 = 0 7^2-49 =0 49-49 = 0 0 = 0
- x=-7
    - x^2-49 = 0 $(-7)^2$ -49 0 49 -49= 0 0 = 0

Ejemplo 2.

x^2 + 9 -9= 0-9

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-9}$

X= No tiene solución en los números reales (NTSNR)

Porque las raíces cuadradas de números negativos no existen en los números reales

Ejemplo 3.

x^2**-x-56 = 0**

(x- 8) (x+7) =0

x-8 +8= 0 +8 o x+7-7= 0-7

x= 8 o x= -7

Ejemplo 4.

4x²+4x+1 = 0

$(2x+1)^2 = 0$

(2x+1) (2x+1) = 0

2x+1 = 0

2x/2= -1 /2 **X=-1/2 multiplicidad dos o repetida**

4.4.2. Por la fórmula de Vieta

La fórmula general, o fórmula de Vieta, se obtiene al despejar x de la ecuación:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Y queda de la siguiente manera:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$$

El discriminante $D = b^2 - 4\,a\,c$

El discriminante nos permite saber cuál puede ser la solución de una ecuación cuadrática.

a) Si $b^2 - 4\,a\,c > 0$ → La ecuación tiene dos soluciones distintas.
b) Si $b^2 - 4\,a\,c = 0$ → La ecuación tiene una solución de multiplicidad 2.
c) Si $b^2 - 4\,a\,c < 0$ → La ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 1

21x²-13x-20= 0

a=21 b=-13 c= -20

D= $(-13)^2$ – 4 (21) (-20) = 169+1680= 1849

$$x = \frac{-(-13)\pm\sqrt{1849}}{2(21)} = \frac{13\pm43}{42}$$

$$x_{1=} \frac{13+43}{42} = \frac{56}{42} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

$$x_{2=} \frac{13-43}{42} = \frac{-30}{42} = \boldsymbol{\frac{-5}{7}}$$

Ejemplo 2

9x² -30x+25=0

a= 9 b= -30 c= 25

D= $(-30)^2$ – 4 (9) (25) = 900- 900 =0

$$x = \frac{-(-30)\pm\sqrt{0}}{2(9)} = \frac{30\pm0}{18} = \frac{30}{18} = \boldsymbol{\frac{5}{3}}$$ **repetida**

Ejemplo 3.

$4x^2 + x + 3 = 0$

a= 4 b=1 c= 3

.

D= $1^2 - 4(4)(3) = 1-48$ **$=-47$**

la ecuación no tiene solución en los números reales

4.5. HOJA DE EJERCICIOS 4.1: ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: Resuelva las siguientes ecuaciones, dejando constancia de su procedimiento y determine el valor de la incógnita.

1. $2y - 34 = -20$
2. $4z + 3 = 3z + 5$
3. $-3a + 3 = -2a$
4. $10(d - 2) = 1$
5. $c + (c + 2) = 36$
6. $3(e - 2) + 9 = 0$
7. $8m - 5 = 3 - 2 + 2m$
8. $5y - 10 = -12 + 4y$
9. $3t - 21 + 4 = 5t - 5$
10. $2y + y - 2 + 4 = 35 + 3 - 9y$
11. $15n = 2(1 + 9n) - 3$
12. $2x - (10 - 4x) = 20$
13. $11y - 5y + 6 = -24 - 9y$
14. $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
15. $y + 1 = [2y - (3y + 1)]$
16. $\frac{2y}{2} = 10$
17. $5 = 3 + \frac{y}{4}$
18. $20 + 2 = 2 + \frac{5p}{2}$
19. $\frac{5h-6}{4} = 4h - 7$
20. $\frac{f+2}{3} = 5f - 4$

REPUESTA A EJERCICIOS PARES ECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA.

2. 2
4. 21/10
6. -1
8. -2
10. 3
12. 5
14. 6
16. 10
18. 8
20. 1

4.6. EVALUACIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA.

Instrucciones: Resuelva y simplifique las siguientes ecuaciones, dejando constancia de su procedimiento y determine el valor de la incógnita. Subraye la respuesta correcta.

1. Determine el valor de la incógnita *g* de la siguiente ecuación $2g - 9 = 2(3 - 4g)$:

a) 15 b) 3 c) 3/2 d) 15/10

2. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{e}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{e + 4 = 2 + \frac{3e}{2}}$:

a) 2 b) 4 c) 4/5 d) 3/2

3. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{y}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{9y - 45 = 16 + 4 - 4y}$**:**

a) 65 b) 13 c) 65/13 d) 5

4. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{a}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{5a - 10 = 4a - 12}$**:**

a) -2 b) 5 c) 5/10 d) 2

5. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{x}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{4[2x - 5(x - 2)] = 2(3x + 2)}$

a) -18 b) -36 c) -36/-18 d) 2

REPUESTA A EVALUACIÓN ECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA.

1. c
2. b
3. d
4. a
5. d

4.7. HOJA DE EJERCICIOS 4.2: ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: Resuelva las siguientes ecuaciones, dejando constancia de su procedimiento y determine el valor de la incógnita.

1. $y^2 - 7y + 12 = 0$
2. $y^2 + 6y = -9$
3. $y^2 - 6y + 9 = 0$
4. $m^2 + 10m + 25 = 0$
5. $p^2 + 9 = 10p$
6. $n^2 = 2n + 3$
7. $y^2 + 3y = 88$
8. $4f^2 + 4f = 3$
9. $2g^2 + 10g = 48$
10. $4x^2 + 12x = -9$
11. $3j^2 - 16j + 5 = 0$
12. $2w^2 - 20w + 42 = 0$
13. $-5c^2 + 13c + 6 = 0$
14. $2d^2 + 3d = -5$
15. $9t^2 - 24t + 16 = 0$
16. $(x + 3)(2x - 1) = 9$
17. $(y + 5)(y - 2) = 0$
18. $(x + 5)^2 = 9$
19. $(x + 7)^2 - 25 = 0$
20. $6x^2 + x - 2 = 0$

REPUESTA A EJERCICIOS PARES ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCOGNITA.

2. y = -3
4. m = -5
6. n = -1 y n = 3
8. f= -3/2 y f= 1/2
10. x = -3/2
12. w = 7 y w = 3
14. d= 1 y d= -5/2
16. x=-4 y x=3/2
18. x=-2 y x=8
20. x=1/2 y x=-2/3

4.8. EVALUACIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: Resuelva y simplifique las siguientes ecuaciones, dejando constancia de su procedimiento y determine el valor o los valores de la incógnita. Subraye la o la respuesta(s) correcta(s).

1. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{y}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{y^2+5y+4=0}$:

   a) y=4 b) y=-4 c) y=1 d) y=-1

2. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{c}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{2c^2+5c=-2}$:

   a) -2 b) 2 c) 1/2 d) -1/2

3. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{m}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{-3m^2+7m+6=0}$:

   a) 3 b) -3 c) -2/3 d) 2/3

4. El valor de la incógnita $\boldsymbol{x}$ en la ecuación $\boldsymbol{(x-2)(x+2)-7(x-1)=21}$ es:

   a) 2 b) -2 c) -9 d) 9

5. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{y}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{y^2-y+\frac{1}{4}=0}$

   a) 1/2 b) -1/2 c) 1/4 d) -1/4

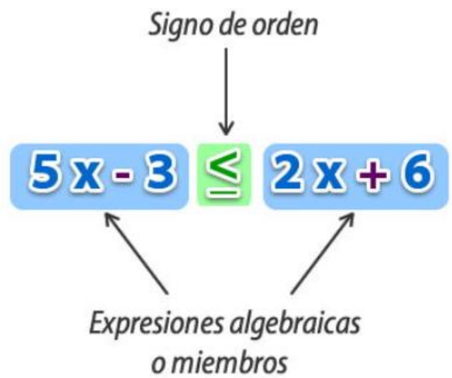
REPUESTA A EVALUACIÓN ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCOGNITA.

1. b y d
2. a y d
3. a y c
4. b y c
5. a

5. INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación es una desigualdad compuesta por dos expresiones algebraicas o miembros, relacionadas por los signos de orden; menor que (<), menor o igual que (≤), mayor que (>) o mayor o igual que (≥).

Ejemplo:



Otro ejemplo:

5.1. FORMAS DE REPRESENTAR UNA INECUACIÓN

Las inecuaciones las podemos expresar de cuatro maneras principales:

1. **Como una desigualdad:** Se expresa a través de una ecuación, usando regularmente la variable **X** y un signo de orden. Por ejemplo: en el caso de que queramos representar la inecuación que nos indica tomar a todos los valores que sean mayores que 8, en forma de desigualdad lo expresaríamos así:

$$\boldsymbol{x > 8}$$

2. **Como un intervalo:** Esta forma de expresar una desigualdad se parece mucho a una coordenada, sin embargo, no lo es. Se siguen algunas reglas que vamos a describir más adelante, pero por lo pronto vamos a mencionar que se pueden usar símbolos como paréntesis ( ) o corchetes [ ].

   Siguiendo nuestro ejemplo anterior, para todo número que sea mayor que 8, la desigualdad en forma de intervalo quedaría así:

$$]\mathbf{8}, +\infty[\quad \text{o bien así} \quad (\mathbf{8}, +\infty)$$

3. **Como un conjunto:** Para expresar una desigualdad en esta forma usamos la notación de conjuntos siguiendo algunas reglas básicas. Una manera general puede expresarse como la siguiente:

$$(a, b) = \{x \in R \ / \ a < x < b\}$$

Esto se leería: la parte $x \in R$ se leería como **x pertenece al conjunto de los números reales** el símbolo **/** se leería como **tal que** y la expresión $a < x < b$ se leería como **el número a es menor que x y x es menor que el número b**. Entonces, cuando leemos esta expresión queda así:

X pertenece al conjunto de los números reales tal que el número **a** es menor que **x** y **x** es menor que el número b.

Otra manera de leerlo sería:

x pertenece al conjunto de los números reales tal que x es mayor que a y menor que b.

En el caso de nuestro ejemplo anterior, en donde estamos expresando una desigualdad que toma en cuenta a todos los números mayores a 8, estableceríamos que:

$$(\mathbf{8}, +\infty) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \;/\; \boldsymbol{x} > \mathbf{8}\}$$

4. **De forma gráfica:** En esta forma elaboramos una pequeña gráfica usando la recta numérica para expresar de dónde a dónde van los valores que estamos considerando de la desigualdad. Esta forma también tiene ciertas reglas que vamos a establecer más adelante pero usando el mismo ejemplo de forma gráfica quedaría así:

5.2. INTERVALOS

Un intervalo es un subconjunto de los números reales, el cual se puede representar a través de la recta numérica. Existen distintos tipos de intervalo, los cuales son:

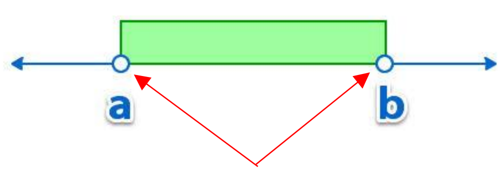
5.2.1. Intervalo abierto

Un intervalo abierto, de **a** a **b**, con **a** < **b**, es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b, es decir:

$$(a, b) =]\,a, b\,[= \{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x < b\}$$

Un intervalo abierto se puede escribir algebraicamente con paréntesis o con corchetes hacia afuera, los que indican que los extremos del intervalo no son parte del conjunto.

Su representación gráfica es;



Un intervalo abierto, se representa en la recta numérica con dos círculos (sin relleno) e indica que aquellos números no se incluyen en el intervalo.

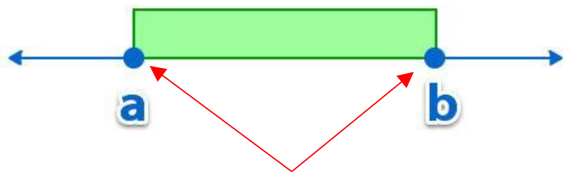
5.2.2. Intervalo cerrado

Un intervalo cerrado, de **a** a **b**, con **a < b**, es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que **a** y menores o iguales que **b**, es decir:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$$

Los corchetes hacia adentro indican que los extremos del intervalo son parte del conjunto.

Su representación gráfica es;



Un intervalo cerrado se representa en la recta numérica con dos puntos (rellenos) e indica que aquellos números si están incluidos en el intervalo.

5.2.3. Intervalo semiabierto

Un intervalo semiabierto, (o también llamado semicerrado) es el conjunto de todos los números reales, abierto por uno de sus lados y cerrado por el otro. Es decir;

A. Intervalo semiabierto por la izquierda

Un intervalo semiabierto por la izquierda, de a a b, con a < b, es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores o iguales que b, es decir:

$$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$$

Su representación gráfica es;

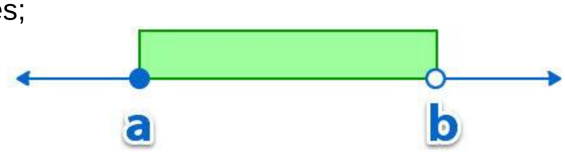
Un intervalo semiabierto por la izquierda se representa en la recta numérica con un círculo por la izquierda y un punto por la derecha, e indica que el número de la izquierda no está incluido en el intervalo y el de la derecha sí.

B. Intervalo semiabierto por la derecha

Un intervalo semiabierto por la derecha, de **a** a **b**, con **a < b**, es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b, es decir;

$$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$$

Su representación gráfica es;



Un intervalo semiabierto por la derecha se representa en la recta numérica con un punto por la izquierda y un círculo por la derecha, e indica que el número de la izquierda si está incluido en el intervalo y el de la derecha no.

5.2.4. Intervalos indeterminados

Los intervalos indeterminados son los que no están acotados o son infinitos, hacia los números reales positivos o hacia los números reales negativos. Existen 4 tipos:

a. Cuando el conjunto está formado por todos los números reales mayores o iguales que a

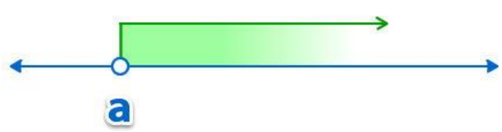
$$[a, +\infty[= [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

Su representación gráfica es

b. Cuando el conjunto está formado por todos los números reales mayores que a;

$$[a, +\infty[= [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

Su representación gráfica es;



c. Cuando el conjunto está formado por todos los números reales menores o iguales que a;

$$]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$

Su representación gráfica es;

d. Cuando el conjunto está formado por todos los números reales menores que a;

$$]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$$

Su representación gráfica es;

En resumen, podemos establecer la siguiente tabla:

Extremo	Incluido	Rep. gráfica	Intervalo	Ecuación
Abierto	No	○	(,) ó] , [	< ó >
Cerrado	Si	●	[,]	≤ ó ≥

Ejemplos

Ejemplo 1:

Expresa y representa como intervalo el siguiente conjunto;

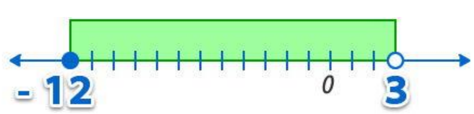
$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, -12 \leq x < 3\}$$

Para expresar este conjunto como intervalo, tenemos que escribir los números correspondientes a los extremos y verificar si son abiertos o cerrados para saber la orientación de los corchetes.

En este caso x es mayor o igual a -12 (cerrado por la izquierda) y menor que 3 (abierto por la derecha), el conjunto quedaría expresado como;

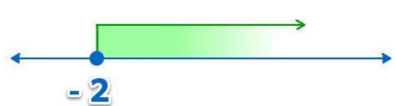
$$[-12, 3[\quad ó \quad [-12, 3)$$

Y su representación gráfica quedaría;



Ejemplo 2:

Si tenemos la siguiente representación gráfica;



Escribe el intervalo y el conjunto que representa.

Si analizamos la representación gráfica, podemos ver que el conjunto que representa son todos los números reales mayores o iguales que – 2. Entonces, el conjunto se escribe;

$$[-2, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$$

Fuente: https://www.portaleducativo.net/cuarto-medio/31/inecuaciones-lineales-intervalos

5.3. SOLUCIÓN DE INECUACIONES

Con esta frase nos referimos a buscar y encontrar los valores de **X** que hagan verdadera una inecuación. El procedimiento se parece mucho a la forma de solucionar ecuaciones, salvo porque ahora estamos utilizando símbolos de desigualdad en lugar de igualdad.

Ejemplos

Ejemplo 1. Encuentre la solución para la siguiente inecuación:

$$2x - 3 > x + 5$$

Resolviendo:

$$2x - 3 > x + 5$$ *Restamos x a ambos miembros*

$$2x - 3 - x > x + 5 - x$$

$$x - 3 > 5$$ .... *Sumamos 3 a ambos miembros*

$$x - 3 + 3 > 5 + 3$$

$$x > 8$$ .... *Solución*

De esta manera, para dar respuesta al ejercicio, el intervalo quedaría expresado así:

1) Conjunto $\{x \in \mathbb{R} / x > 8\}$

2) Intervalo $]8, +\infty[$

3) Gráfica

Ejemplo 2: Encuentre el conjunto solución para la desigualdad $\boldsymbol{x - 32 < 54}$

$x - 32 < 54$ Sumamos +32 de ambos lados de la desigualdad.

$x - 32 + 32 < 54 + 32$ Resolvemos y obtenemos el resultado.

$x < 86$

De esto podemos concluir que el conjunto solución de la desigualdad es (expresándolo en tres formas):

1) Conjunto $\{x \in \mathbb{R} / x < 86\}$

2) Intervalo $]-\infty, 86[$

3) Gráfica

5.4. HOJA DE EJERCICIOS 5: INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: Resuelva las siguientes inecuaciones y represente la respuesta de tres maneras: como desigualdad, como conjunto y de forma gráfica.
Recomendación: Auxiliarse del texto de apoyo de matemáticas en donde se desarrolla el tema.

1. $5t + 3 \geq 2\,t + 9$
2. $2y - 3 > y + 5$
3. $8m + 16 > 4m - 8$
4. $x < 4$
5. $a \geq 4 + 3$
6. $3x - 6 \geq x + 3$
7. $3 - 2m \geq 7$
8. $3x - 14 \leq 7x - 2$
9. $-c + 5 \leq 2c + 2$
10. $8y + 16 > 4y - 8$

RESPUESTAS A EJERCICIOS PARES

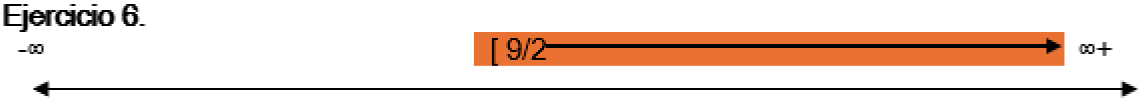
Ejercicio 2.

Desigualdad = y>8, Intervalo = (8, ∞+) Conjunto = $\{x \in R/y > 8\}$

Ejercicio 4.

Desigualdad = x<4, Intervalo = (-∞, 4), Conjunto = $\{x \in R/x < 4\}$

Ejercicio 6.



Desigualdad = x≥9/2, Intervalo = [9/2, ∞+), Conjunto = $\left\{x \in R/x \geq \frac{9}{2}\right\}$

Ejercicio 8.

Desigualdad = -3≤x, Intervalo = [-3, ∞+), Conjunto = $\{x \in R/x \leq -3\}$

Ejercicio 10.

Desigualdad = y>-6, Intervalo = (-6, ∞+), Conjunto = $\{x \in R/y > -6\}$

5.5. EVALUACIÓN 5: INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

1. La solución de la inecuación $\mathbf{2y - 8 < 0}$ es:

a) y>4 b) y<8 c) y>8 d) y<4

2. El rango de la inecuación $\mathbf{-5t + 8 > 7}$ es:

a) (-∞, 1/5) b) (1/5, +∞) c) (-∞, -1/5) d) (-1/5, +∞)

3. La solución de la inecuación $\mathbf{9y - 45 \leq 16 + 4 - 4y}$ es:

a) y≤65/13 b) y<65/13 c) y>65/13 d) y≥65/13

4. El rango de la inecuación $\mathbf{f + 8 \leq 3f + 1}$ es:

a) (-∞, 7/4) b) [7/4, +∞) c) (-7/4, +∞) d) [-7/4, +∞)

5. La solución de la inecuación $\mathbf{2w + 1 \geq 3 + w - 1}$ es:

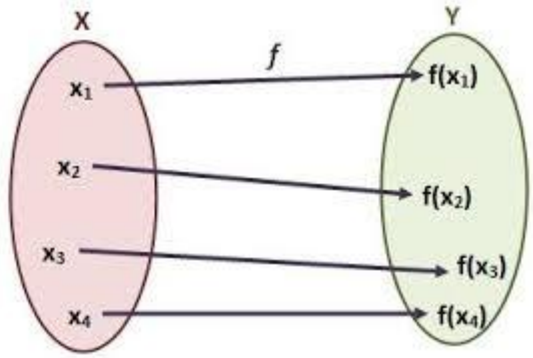
a) w>1 b) w<1 c) w≤1 d) w≥1

RESPUESTAS A EVALUACIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

1. d
2. c
3. a
4. b
5. d

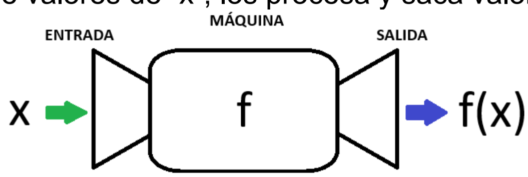
6. FUNCIONES

Una función es una relación entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto (llamado dominio) se le asigna exactamente un elemento del segundo conjunto (llamado codominio).



Nota: tomado de https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funciones/

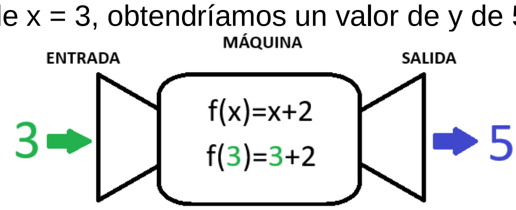
Las funciones son como reglas que transforman una entrada en una salida. En este caso, las entradas son valores de “x” y las salidas son valores de “y”. Una forma muy común es imaginarlas como una máquina que recibe valores de “x”, los procesa y saca valores de “y”.



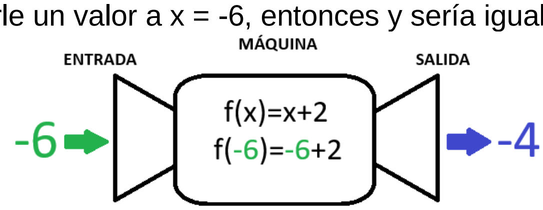
A “x” la vamos a tomar como la variable independiente y a “y” como la variable dependiente, es decir que, el valor de “y” depende del valor asignado a “x”, por lo que podemos decir que “y” está en función de “x”. Otra manera de expresarlo es que y = f(x).

Por ejemplo, si la máquina fuera “**x+2**”, entonces,

- Al colocarle un valor de x = 3, obtendríamos un valor de y de 5. En otras palabras f(3) = 5.



- Y si decidimos ponerle un valor a x = -6, entonces y sería igual a -4, es decir, f(-6) = -4.



Existen muchos tipos de funciones tales como las funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, logarítmicas, exponenciales, etc., sin embargo, en este texto veremos únicamente los conocimientos básicos sobre las funciones lineales.

6.1. FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal es un tipo específico de función que se representa como:

$$f_{(x)} = mx + b$$

Donde:

$f_{(x)}$ = se lee "f de x" y representa a la variable dependiente "y". Esto quiere decir que el valor de y está en función del valor que tenga x, es decir, que depende del valor de x.

m = Es la pendiente. Representa un cambio de valor en la variable dependiente (y) provocado por un cambio de valor en la variable independiente (x).

x = Es la variable independiente.

b = Es el intercepto. Es el valor que tiene "y" cuando x = 0. En otras palabras es el punto en donde la gráfica de la función f(x) se cruza con el eje vertical de un plano cartesiano. También se le conoce como "ordenada al origen".

Otra forma de representarla es:

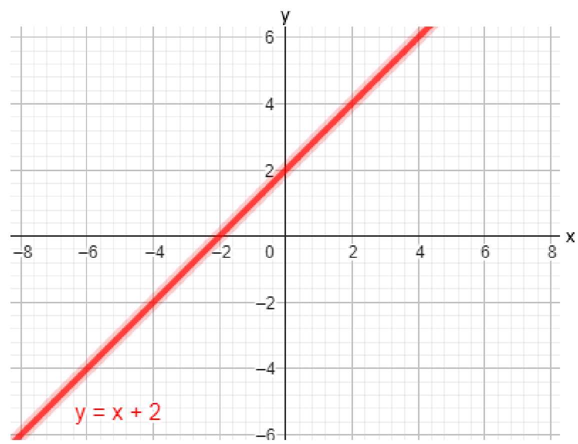
Pendiente Intercepto

$$y = mx + b$$

En donde **y** está en función de **x**.

Variables.

Un aspecto muy importante es que cuando graficamos una función lineal en el plano cartesiano obtenemos una línea recta como la siguiente:



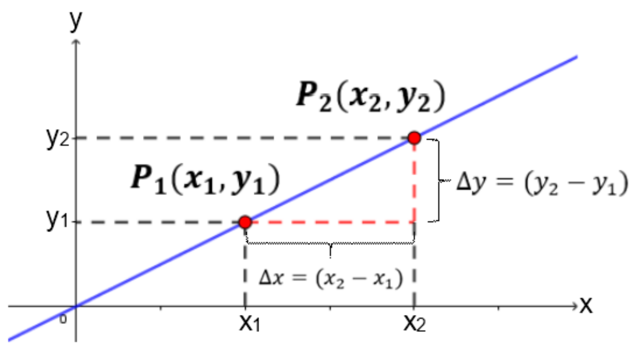
En este texto no vamos a abordar el tema completo de funciones sino solamente las principales características de la ecuación de una recta. Para ello veamos los conceptos principales de los elementos que intervienen en la ecuación.

6.1.1. La pendiente

La pendiente es una medida que describe la inclinación de una línea recta en un plano cartesiano. Matemáticamente, se calcula como la razón del cambio en la coordenada "y" (vertical) al cambio en la coordenada "x" (horizontal) entre dos puntos en la línea. La fórmula es:

$$m = pendiente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Cambio\ vertical}{Cambio\ horizontal}$$

Donde
m = pendiente de la recta que pasa por los puntos 1 y 2.
x_1 = abscisa del punto 1.
y_1 = ordenada del punto 1.
x_2 = abscisa del punto 2.
y_2 = ordenada del punto 2.



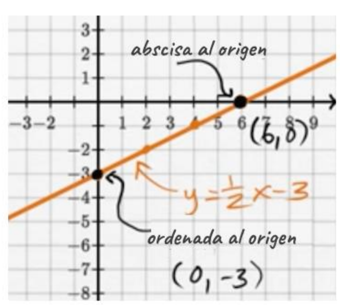
6.1.2. Abscisas, ordenadas e intercepto

En una coordenada (x,y) conocemos como **abscisa** al valor de **x** y como **ordenada** al valor de **y**. Por ejemplo, en la coordenada (2,-5), el valor de la abscisa es 2 y el valor de la ordenada es -5.

Por otro lado, nos referimos como el **origen** al centro del plano cartesiano, el cual tiene como coordenadas **(0,0)**.

De lo anterior también surgen otros dos términos importantes que son:

- **Abscisa al origen:** que se refiere al valor de x respecto al origen, es decir que su coordenada sería (a,0). En otras palabras, es el valor de **x** cuando **y = 0**.
- **Ordenada al origen:** Es el valor de y respecto al origen. En otras palabras es el valor de **y** cuando **x = 0**. En forma de coordenada se representaría como **(0,b)**. En el caso de la ecuación de una recta la ordenada al origen representa a lo que se conoce como **INTERCEPTO**.



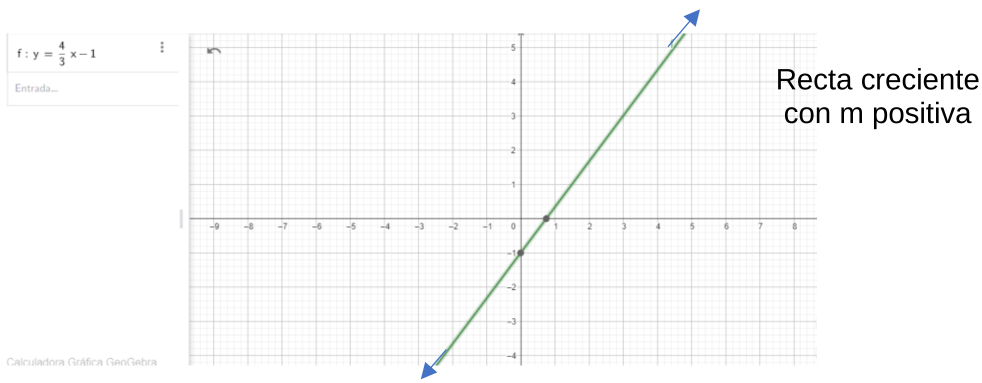
Fuente: https://n9.cl/o4bfx

6.1.3. Interpretación del signo de la pendiente

Desde la perspectiva de un aumento en el recorrido, una pendiente es positiva cuando la relación ${}^{\Delta y}/_{\Delta x}$ es positiva, es decir, cuando dado un aumento en el plano de las abscisas, se da un aumento en el plano de las ordenadas.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Aumenta\ (diferencia+)}{Aumenta\ (diferencia+)} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

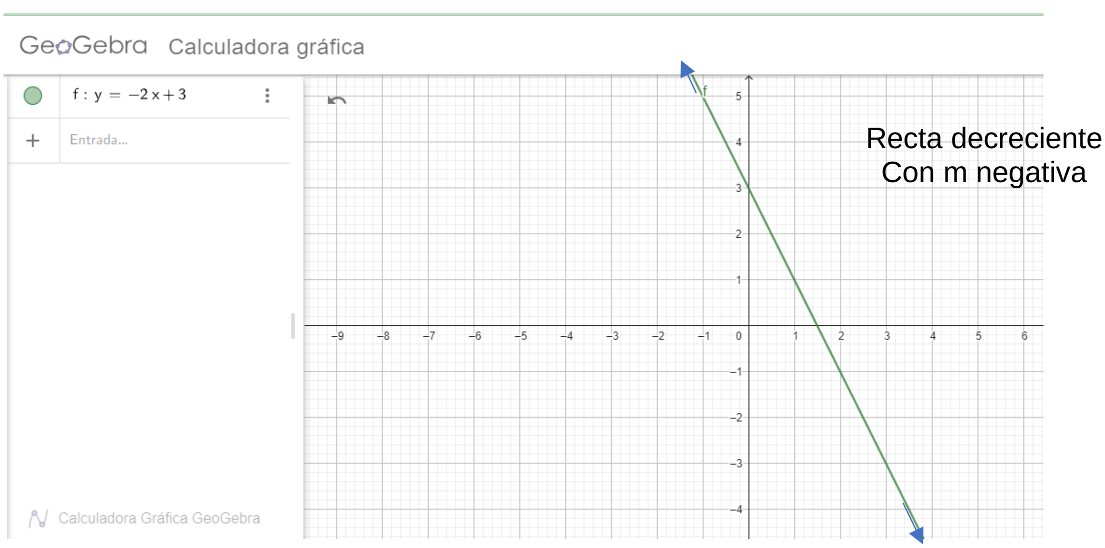
Ejemplo: $y = \frac{4}{3}x - 1$



Una pendiente negativa se da cuando la relación ${}^{\Delta y}/_{\Delta x}$ es negativa, es decir, cuando dado un aumento en el plano de las abscisas, se da una reducción en el plano de las ordenadas.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Disminuye\ (diferencia-)}{Aumenta\ (diferencia+)} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

Ejemplo y = -2x + 3



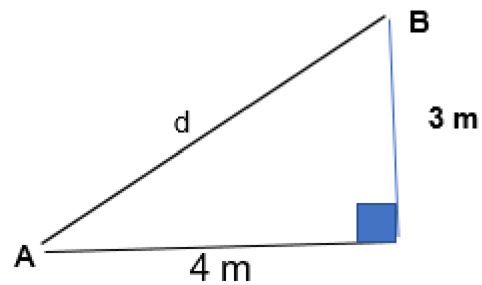
6.1.4. Formas de representar la pendiente

La pendiente tiene varias formas de representarse, cada una de las cuales nos ayudan de una u otra manera a interpretar lo que nos está indicando:

1. **En forma de fracción:** por ejemplo m = 2/3. Esto significa que el valor de **y** aumenta en 2 unidades por cada 3 unidades que aumenta el valor de **x**.
2. **En forma de decimal:** por ejemplo m = 0.5. Esto significa que el valor de **y** aumenta en 0.5 unidades por cada unidad que aumenta el valor de **x**.
3. **En forma de porcentaje:** por ejemplo m = 50%. Esto significa que el valor de **y** aumenta 50 unidades por cada 100 unidades que aumenta el valor de **x**.

Para pasar de la forma de fracción a la forma de decimal o de porcentaje podemos hacer lo siguiente:

Tomando como ejemplo una pendiente m = 3/4 , calcule la pendiente en forma de decimal y en forma de porcentaje.



Para pasar a la forma de decimal simplemente hacemos la división 3/4 = 0.75.

Para pasar a la forma de porcentaje, hacemos la división anterior pero la multiplicamos por 100.

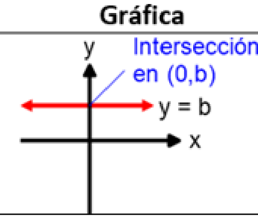
% de pendiente: ¾ x 100= **75%** de pendiente

75/100 se interpreta, que por cada 100 unidades de movimiento en el plano horizontal, se mueve 75 unidades en el plano vertical

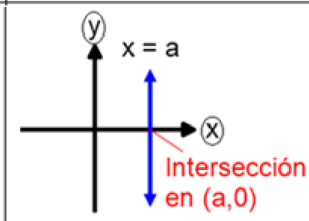
6.1.5. Rectas horizontales y verticales

Existen algunas rectas que podemos considerar especiales por ciertas situaciones que se dan con respecto a su pendiente. Este es el caso de las rectas horizontales y las rectas verticales.

- En el caso de las **rectas horizontales**, la característica especial es que su pendiente es igual a cero (m = 0), lo que significa que no importa de cuánto sea el cambio en **x**, el cambio en **y** siempre va a ser cero. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

Recta		Ecuación	Pendiente	Gráfica
Horizontal	Paralela al eje x	$\boldsymbol{y = b}$	$\boldsymbol{m = 0}$ Esto es debido a que no existe un cambio en la elevación de la recta ($\Delta y = 0$).	

- En el caso de las **rectas verticales**, la característica especial es que su pendiente es infinita. Eso es debido a que no importa cuánto sea la variación en **y**, la variación en **x** es cero, y la división entre cero no está definida, por lo tanto decimos que no existe. $m == \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{0} = \nexists$

Recta		Ecuación	Pendiente	Gráfica
Vertical	Paralela al eje y	$\boldsymbol{x = a}$	$\boldsymbol{m = \nexists}$ No tiene pendiente puesto que no existe un recorrido o cambio en el plano horizontal ($\Delta x = 0$), lo cual provoca que la pendiente no esté definida ya que la división entre cero, cualquiera que sea Δy, no está definida.	

6.1.6. Ejercicios

La clase de ejercicios que vamos a resolver en este texto de apoyo puede corresponder a cualquiera de los siguientes casos:

1. Cuando se conoce la pendiente y el intercepto con el eje y (0, b)

Ejemplo 1

¿Cuál es la ecuación de la recta si m = 2/3 y la recta corta al eje y en -1?

En este caso podemos ver que tenemos el valor de la pendiente (**m = 2/3**) y el valor del intercepto **b = -1**. De este último debemos mencionar que sus coordenadas son (0,-1), sin embargo, en el desarrollo de este ejercicio sólo necesitamos el -1.

Entonces, sustituimos los valores de que tenemos en la ecuación que ya conocemos de la recta:

$$y = mx + b$$

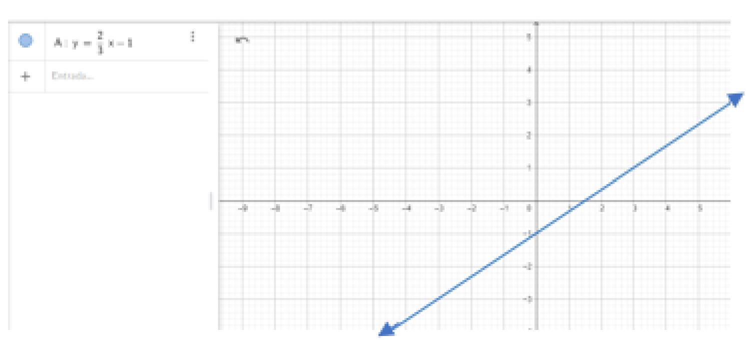
$$y = \mathbf{2/3}\, x + (\mathbf{-1})$$

Y simplificamos la expresión:

$$\boldsymbol{y = 2/3\, x - 1}$$

Como se puede ver, podemos expresarla como “y” entendiendo que ésta está en función de x, pero una manera más apropiada sería expresarla como f de x:

$$\boldsymbol{f_{(x)} = 2/3\, x - 1}$$



2. Cuando se conoce la pendiente y un punto por donde pasa la recta

Ejemplo 2

¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene m = 2 y que pasa por el punto (-1,0)?

En este caso nos están dando el valor de la pendiente y el valor de un punto que no es el intercepto, por lo que lo primero que tenemos que hacer es determinar éste último.

Para determinar el intercepto sustituimos los valores de la pendiente (**m = 2**) y del punto (**-1**,**0**) en la ecuación de la recta para despejar **b**. Tomemos en cuenta que en dicho punto el valor de **x = -1** y el valor de **y = 0**.

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

$$\boldsymbol{0 = 2\,(-1) + b}$$

$$\boldsymbol{0 = -2 + b}$$

$$\boldsymbol{2 = b}$$

Ya que sabemos que el intercepto es 2 (b = 2), entonces sustituimos los valores de la pendiente (**m = 2**) y el intercepto (**b = 2**) en la misma ecuación de la recta para crear la fórmula que buscamos así como lo hicimos en el ejemplo 1:

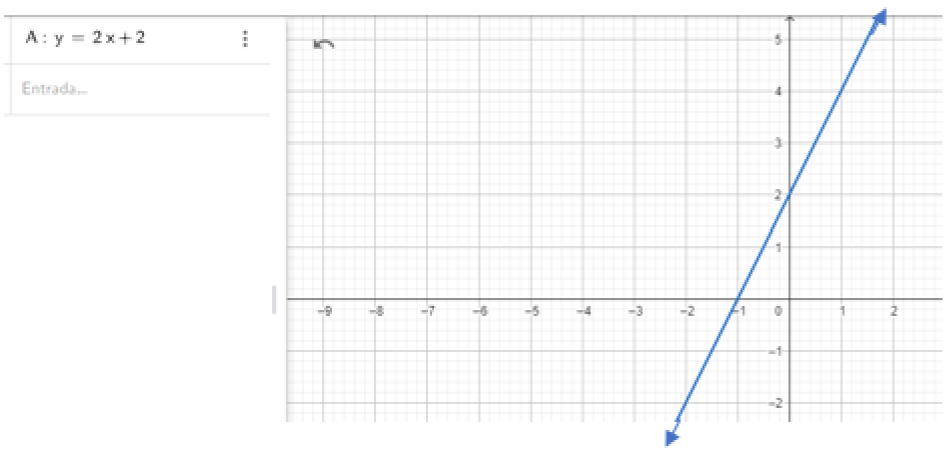
$$y = mx + b$$

$$y = 2\,x + (2)$$

$$\boldsymbol{y = 2x + 2}$$

Como se puede ver, podemos expresarla como "y" entendiendo que ésta está en función de x, pero una manera más apropiada sería expresarla como f de x:

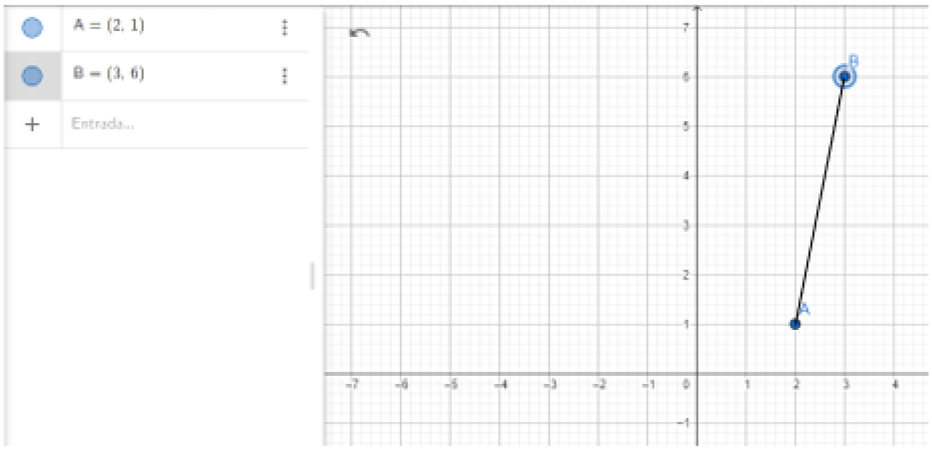
$$\boldsymbol{f_{(x)} = 2\,x + 2}$$



3. Cuando se conocen dos puntos por donde pasa la recta

Ejemplo 3

¿Cuál es la ecuación de la recta si pasa por los puntos (2,1) y (3,6)?



Lo primero es determinar el valor de la pendiente. Para esto vamos a tomar como el primer punto a (2,1) y como el segundo punto a (3,6) y los sustituiremos en la siguiente ecuación:

Coordenadas del segundo punto

Coordenadas del primer punto

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 1}{3 - 2} = \frac{5}{1} = \mathbf{5}$$

Ya que tenemos el valor de la pendiente (m = 5), procedemos a buscar el valor del intercepto de la misma manera que hicimos en el ejemplo 2 usando cualquiera de los puntos dados. En este caso usaremos el primer punto (2,1). (Realice usted el mismo ejercicio usando el segundo punto y se dará cuanta de que da lo mismo).

$$\mathbf{1 = 5(2) + \boldsymbol{b}}$$

$$\mathbf{1 = 10 + \boldsymbol{b}}$$

$$\mathbf{1 - 10 = \boldsymbol{b}}$$

$$\mathbf{-9 = \boldsymbol{b}}$$

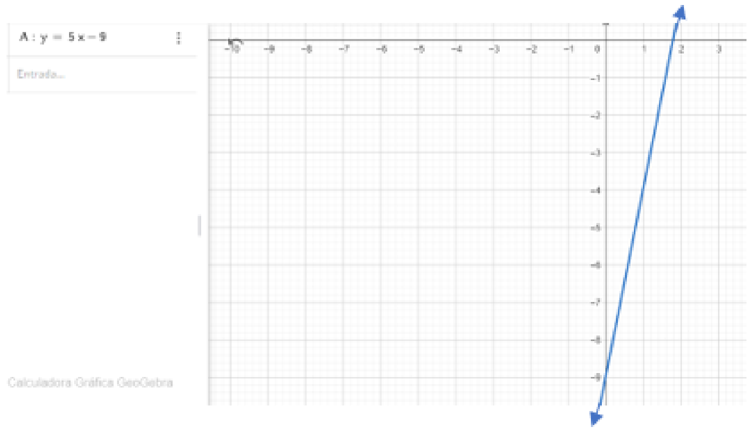
Ya que sabemos que el intercepto es b = -9, entonces sustituimos los valores de la pendiente (**m = 5**) y el intercepto (**b = -9**) en la misma ecuación de la recta que hemos estado usando así como lo hicimos en el ejemplo 1:

$$y = mx + b$$

$$y = \mathbf{5}\,x + (\mathbf{-9})$$

$$\boldsymbol{y = 5x - 9}$$

$$\boldsymbol{f_{(x)} = 5\,x - 9}$$



4. Valuación de una expresión

Si tenemos la ecuación de una recta y queremos saber cuál es la pareja ordenada que resuelve la igualdad de dicha ecuación, solamente necesitamos el valor de cualquiera de las incógnitas para poder encontrar el valor de la otra y así saber cuál es la pareja ordenada que cumple con la igualdad.

Si la recta es:

$$y = 4x - 3$$

Y sabemos que x = 2, entonces podemos encontrar el valor de y sustituyendo 2 en x.

$$y = 4(2) - 3$$
$$y = 8 - 3$$
$$\boldsymbol{y = 5}$$

Por lo que la pareja ordenada que resuelve o cumple la igualdad de la ecuación es (2,5). Verifiquemos:

$$y = 4x - 3$$
$$5 = 4(2) - 3$$
$$5 = 8 - 3$$
$$5 = 5$$

En otras ocasiones vamos tener el valor de **y** y podemos encontrar el valor de **x** haciendo el proceso de forma similar.

6.2. HOJA DE EJERCICIOS 6: FUNCIONES LINEALES

¿Cuál es la ecuación de la recta que cumple las siguientes condiciones?:

1. Pendiente $m = ½$ intercepto $b = 2$
2. $m = 2/3$ $b = -2$
3. $m = - 1/3$ $b = 3$
4. $m = -2$ $b = -3$
5. $m = -5/4$ $b = 2$
6. $m = 4/7$ $b = 3/4$
7. $m = 1/8$ $b = - 5/2$
8. $m = - 5/2$ $b = - 9/4$
9. $m = - 7/9$ $b = - ¾$
10. $m = 4$ $b = -3/2$

¿Cuál es la ecuación de la recta que cumple las siguientes condiciones?:

11. $m = ¾$ Pasa por el punto (2,3)
12. $m = 4/3$ Pasa por el punto (2,-3)
13. $m = - 1/2$ Pasa por el punto (-2,4)
14. $m = - 2$ Pasa por el punto (-1,-5)
15. $m = + 3$ Pasa por el punto (-3,-1)
16. $m = 5/8$ Pasa por el punto (2,3)
17. $m = -3/4$ Pasa por el punto (3,-3)
18. $m = 2/5$ Pasa por el punto (-4,3)
19. $m = 5/2$ Pasa por el punto (5/6,3/4)
20. $m = 6/7$ Pasa por el punto (6/5,-3/2)

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos…?

21. A (5,0) B (0,6)
22. A (0,5) B (10,-3)
23. A (2,-3) B (-2,7)
24. A (-4,-1) B (-6,-7)
25. A (-3,-5) B (5,-8)
26. A (-1,1) B (7,3)
27. A (1,2) B (6,-6)
28. A (-6,3) B (5,-2)
29. A (-5,4) B (-3,-1)
30. A (5,5) B (0,-6)

Para las siguientes funciones:

A) Encuentre el valor de la variable Y cuando X adopta valores de -5, 0 y 5.
B) Encuentre el valor de X cuando Y adopta valores de -5, 0 y 5.
C) Represente la función en una gráfica

31. $y = 2$
32. $y = -5$
33. $y = 4/3$
34. $y = -1/5$
35. $y = 7/8$

36. $y = 2x + 2$
37. $y = \frac{1}{2} x - 5$
38. $y = -3/5 x + 7$
39. $y = -2/3 x - 8$
40. $y = 2x + (-4)$

Resuelva los siguientes problemas:

41. Inicialmente una planta medía 5 cm de altura y ha estado creciendo a razón de 2 cm cada semana. A) Exprese la altura de la planta como una función lineal del tiempo en semanas, y B) ¿Que altura tendrá dicha planta a las 5 semanas?
42. Un vehículo consume un galón de combustible por cada 40 km que recorre (1 gal / 40 km) y tiene un tanque con capacidad de 10 galones. A) Exprese la cantidad de combustible que queda en el tanque como una función de la distancia recorrida. B) ¿Cuánto combustible habrá consumido dicho vehículo si ha recorrido un total de 200 km?
43. En una región, la demanda de tomate (y, expresada en libras) en función del precio (x, expresado en quetzales) está dada por $y = -1500 x + 7{,}000$. A) ¿Qué significa el -1500? B) ¿Qué quiere decir el 7,000? C) ¿Cuál es la demanda de tomate si el precio es de Q2?

Respuestas de los ejercicios pares

2. $y = 2/3 x - 2$
4. $y = -2 x - 3$
6. $y = 4/7 x + 3/4$
8. $y = - 5/2 x - 9/4$
10. $y = 4 x - 3/2$
12. $y = 4/3 x - 17/3$
14. $y = - 2 x \quad - 7$
16. $y = 5/8 x + 7/4$
18. $y = 2/5 x + 23/5$
20. $y = 6/7 x - 177/70$
22. $y = -4/5 x + 5$
24. $y = 3x + 11$
26. $y = \frac{1}{4} x + 5/4$
28. $y = -5/11 x + 3/11$
30. $y = 11/5 x - 6$
32. A) -5, -5 y -5 B) Indefinido, puede adoptar cualquier valor.
34. A) -1/5, -1/5, -1/5 B) Indefinido, puede adoptar cualquier valor.
36. A) -8, 2, 12 B) – 7/2, 2, 3/2
38. A) 10, 7, 4 B) 20, 35/3, 10/3
40. A) – 14, -4, 6 B) – ½, 2, 9/2
42. 42.A) $y = - 1/40 x + 10$

6.3. EVALUACIÓN DE FUNCIONES LINEALES

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente de 2/3 y un intercepto en ¾?

a) Y = ¾ X – 2/3 b) Y = - 2/3 X – 3/4 c) Y = 2/3 X – 3/4 d) Y = 2/3 X + 3/4

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente 1/7 y pasa por el punto (-2, 3/2)

a) Y = 1/7 X – 2 b) Y = 1/7 X + 3/2 c) Y = 1/7 X + 25/14 d) Y = 1/7 X - 3/2

3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2,3) y B(-2,-5)?

a) Y = 2X – 1 b) Y = -1 X + 2 c) Y = X - 2 d) Y = -2X + 1

4. En la ecuación y = -2/5 x – 4/5, ¿cuál es el valor que adopta x cuando y = -3?

a) x = 2/11 b) x = 11/2 c) x = 2/5 d) Y = -2/5

5. ¿Qué peso tendrá un lechón al cabo de dos semanas si tenía un peso inicial de 3 kg e incrementa su peso a razón de 200 g cada día?

a) 3.4 kg b) 2803 kg c) 10 kg d) 5.8 kg

Respuesta de la evaluación:
1.d
2.c
3.a
4.b
5.d

7. GEOMETRÍA PLANA

La geometría plana estudia las figuras que tienen puntos que están en un mismo plano, abarca a los polígonos en general, así como al círculo. A continuación veremos los principales conceptos básicos respecto a la geometría planta.

7.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Son el punto, la recta y el plano. De estos elementos fundamentales podemos tener una idea abstracta, pero en base a postulados que determinan relaciones entre e ellos si se pueden definir.

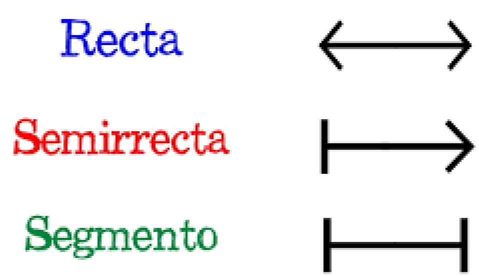
7.1.1. Punto

Es la unidad más pequeña de la geometría que no puede dividirse. No tiene dimensiones, pero si representa una posición en el espacio, determinada respecto de un sistema de coordenadas preestablecidas. Gráficamente se representa con un signo de puntuación y se le denomina con una letra mayúscula al costado (A).

7.1.2. Línea

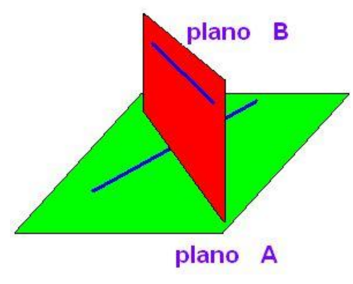
Es la representación de una sucesión continua e indefinida de puntos en el espacio. Presenta solo una dimensión (longitud). La línea también puede considerarse la distancia más corta entre dos puntos en un mismo plano. Se pueden clasificar en:

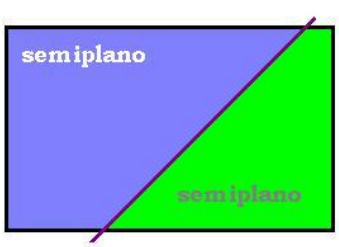
a) **Línea Recta:** Es una sucesión infinita de puntos que tienen una misma dirección, está compuesta de infinitos segmentos. Se pueden señalar por medio de dos puntos en el espacio.
b) **Semirrecta o rayo:** Están formados por todos los puntos de la recta que se encuentran a partir de un punto fijo de dicha recta (origen). A diferencia de la semirrecta, el rayo si contiene al punto de origen.
c) **Segmento de recta:** Está conformado por todos los puntos de la recta que se encuentran entre dos puntos fijos en dicha recta (extremos). Dicho segmento contiene a los dos puntos extremos y representa la menor distancia entre ellos.



7.1.3. Plano

Es una superficie que tiene dos dimensiones sin espesor. Está conformado por infinitos puntos y rectas. Se representa con una letra mayúscula ubicada en una de sus esquinas (vértices).





7.1.4. Semiplano

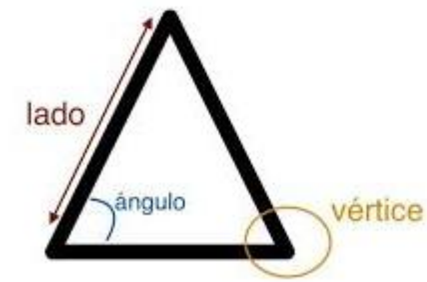
Son las partes de un plano que están delimitadas por cualquiera de sus rectas. Cada recta divide al plano en dos partes (dos semiplanos).

7.2. POLÍGONOS

Es la figura geométrica bidimensional que determina una región en el plano, formada por segmentos de recta consecutivos no alineados. La palabra polígono procede del griego (poli) “muchos” y (gona) “ángulo”. En este texto sólo vamos a abordar a los triángulos, cuadriláteros y círculos.

7.2.1. Triángulos

Un triángulo, en geometría, es la reunión de tres segmentos que determinan tres puntos del plano no colineales. Cada punto dado pertenece a dos segmentos exactamente. Los puntos comunes a cada par de segmentos se denominan vértices del triángulo y los segmentos de recta determinados son los lados del triángulo. Dos lados contiguos forman uno de los ángulos interiores del triángulo. Un triángulo es una figura estrictamente convexa.



Un triángulo tiene tres ángulos interiores, tres ángulos exteriores, tres lados y tres vértices entre otros elementos. La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera será igual a 180°.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Ejemplo: $74.9° + 53.5° + 51.6° = 180°$.

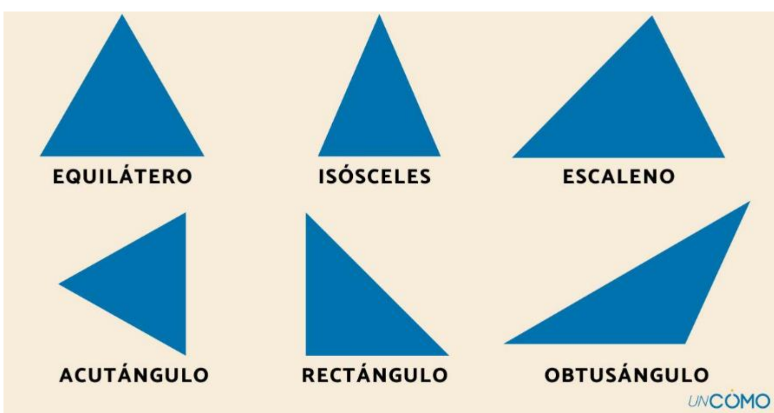
A. Clasificación de triángulos

Según sus lados:

1. **Equilátero:** Tiene los tres lados iguales. También sus ángulos internos son iguales, de 60° cada uno.
2. **Isósceles:** Tiene dos lados iguales y uno diferente. Los ángulos puestos a los lados iguales también son iguales.
3. **Escaleno:** Sus tres lados son de diferentes longitudes y sus ángulos también son todos diferentes.

Según sus ángulos:

1. **Acutángulo:** Todos sus ángulos internos son menores a 90°.
2. **Rectángulo:** Tiene un ángulo recto, es decir, de 90°.
3. **Obtusángulo:** Tiene un ángulo mayor a 90°.



Nota: adaptado de https://www.mundodeportivo.com/uncomo/educacion/articulo/tipos-de-triangulos-nombres-y-caracteristicas-53495.html

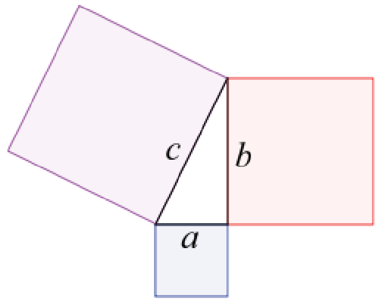
B. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los dos lados menores del triángulo, los que conforman el ángulo recto).

Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes **a** y **b**, y la medida de la hipotenusa es **c**, se establece que:

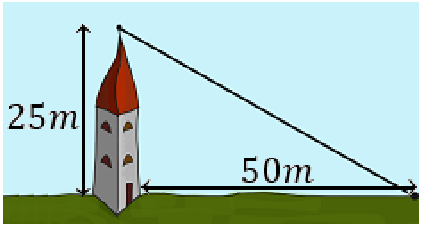
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



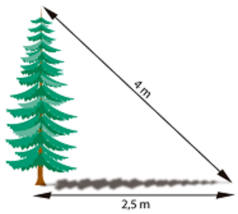
Ejemplos

1. Se quiere colocar un cable desde la cima de una torre de 25 metros altura hasta un punto situado a 50 metros de la base la torre. ¿Cuánto debe medir el cable?



   $C^2 = 25^2 + 50^2$
   $C^2 = 3{,}125$
   $C = \sqrt{3125} = \sqrt{625\,(5)} = \mathbf{55.90}$ **metros**

2. Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2.5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol? Ver figura



   $4^2 = h^2 + 2.5^2$
   $4^2 - 2.5^2 = h^2$
   $16 - 6.25 = h^2$
   $9.75 = h^2$
   $\sqrt{9.75} = h$
   $h = 3.12\ metros$

7.2.2. Cuadriláteros

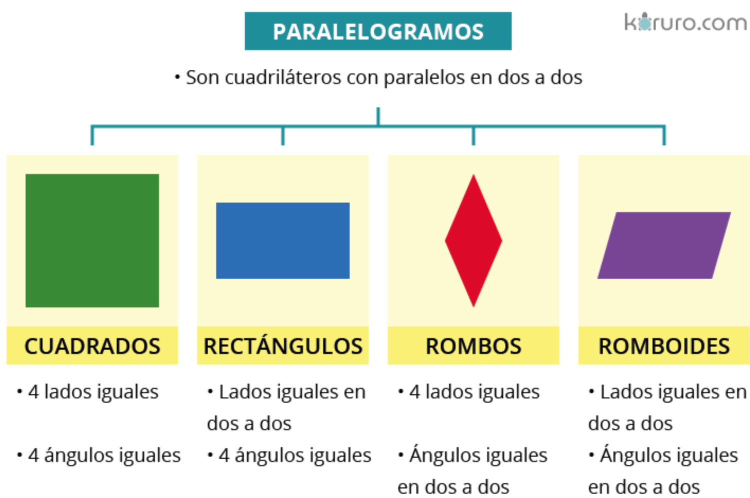
Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas, pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de los ángulos interiores es igual a 360º. Otros nombres usados para referirse a este polígono son tetrágono y cuadrángulo. Los cuadriláteros se clasifican de la siguiente forma:

$$\text{Cuadriláteros}\begin{cases}\text{Paralelogramos}\begin{cases}\text{Rectángulos}\begin{cases}\text{Cuadrado}\\ \text{Rectángulo}\end{cases}\\ \text{No rectángulos}\begin{cases}\text{Rombo}\\ \text{Romboide}\end{cases}\end{cases}\\ \text{No paralelogramos}\begin{cases}\text{Trapecios}\begin{cases}\text{Trapecio}\\ \text{Trapezoide}\end{cases}\\ \text{Deltoide}\end{cases}\end{cases}$$

A. Paralelogramos

Un paralelogramo es un tipo especial de cuadrilátero (un polígono formado por cuatro lados) cuyos lados son paralelos dos a dos.

a) **Paralelogramos rectángulos:** Son aquellos cuyos ángulos internos son todos ángulos rectos. En esta clasificación se incluyen el cuadrado, el rectángulo.
b) **Paralelogramos no rectángulos:** Son aquellos que tienen dos ángulos internos agudos y dos ángulos internos obtusos. En esta clasificación se incluye: el rombo y romboide.



Nota: tomado de https://koruro.com/clasificacion-cuadrilateros

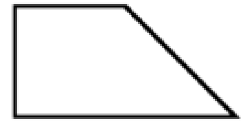
B. No paralelogramos

Los no paralelogramos son figuras geométricas de cuatro lados (cuadriláteros) que no cumplen con las propiedades de los paralelogramos. Es decir, no tienen ambos pares de lados opuestos paralelos. Por ejemplo: trapecios, cuadriláteros irregulares y combinaciones de formas.

a. Trapecio

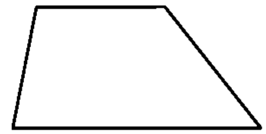
Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y otros dos no paralelos. Los lados paralelos se llaman bases del trapecio y la distancia entre ellos se llama altura. Se denomina mediana al segmento que tiene por extremos los puntos medios de los lados no paralelos. Existen tres tipos de trapecios los cuales son:

Trapecio rectángulo: Es el que tiene un lado perpendicular a sus bases o que simplemente tiene un ángulo recto. Tiene dos ángulos internos rectos, uno agudo y otro obtuso.



Trapecio isósceles: Es el que tiene los lados no paralelos de igual medida. Tiene dos ángulos internos agudos y dos obtusos, que son iguales entre sí. Las diagonales son congruentes.

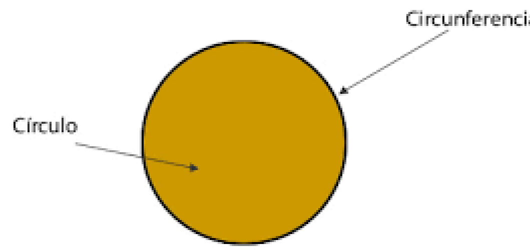
Trapecio escaleno: Es el que no es isósceles ni rectángulo, la medida de sus lados da como resultado medidas diferentes. Sus cuatro ángulos internos poseen diferentes medidas.



7.2.3. Círculo y circunferencia

A. Círculo

En geometría, es el conjunto de los puntos de un plano que se encuentran contenidos en una circunferencia. El círculo tiene área o superficie.

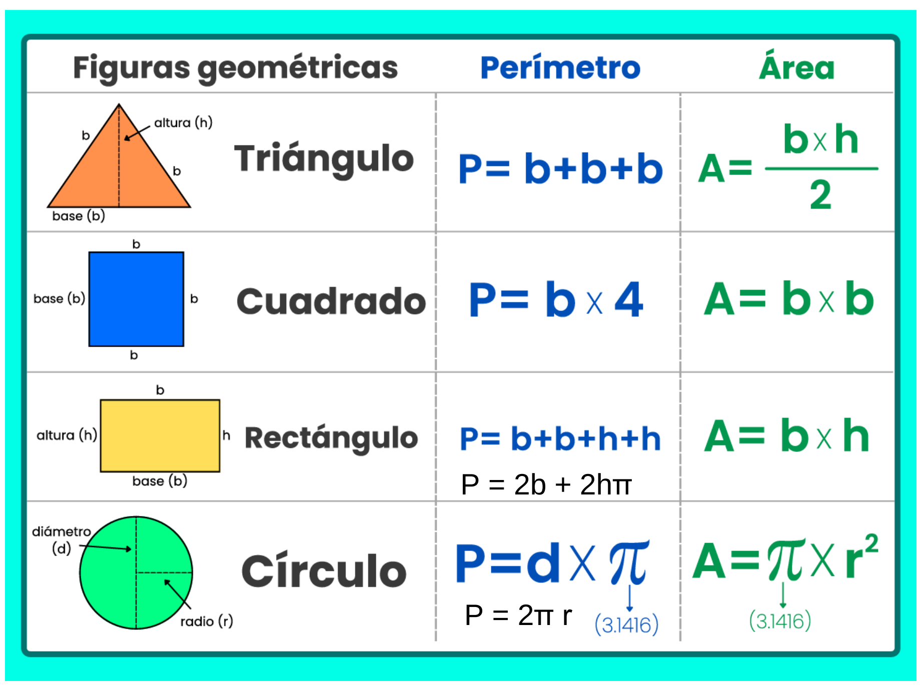


B. Circunferencia

Es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de otro fijo, llamado centro; esta distancia se denomina radio. Sólo posee longitud.

7.3. ÁREAS Y PERÍMETROS

Para calcular el área y el perímetro de las principales figuras geométricas se pueden utilizar las siguientes ecuaciones:

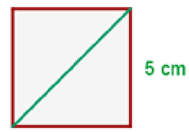


Figuras geométricas	Perímetro	Área
Triángulo	$P = b+b+b$	$A = \frac{b \times h}{2}$
Cuadrado	$P = b \times 4$	$A = b \times b$
Rectángulo	$P = b+b+h+h$ $P = 2b + 2h\pi$	$A = b \times h$
Círculo	$P = d \times \pi$ (3.1416) $P = 2\pi r$	$A = \pi \times r^2$ (3.1416)

Nota: tomado de https://vagodeinternet.com/formulas-de-figuras-geometricas/

Ejemplos

1. Determine el área y el perímetro del siguiente cuadrado:



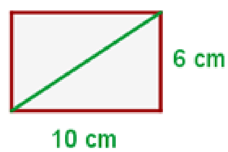
El perímetro (p) del cuadrado es la sumatoria de todos sus lados= 5+5+5+5= 20, o bien, la multiplicación de los cuatro lados por la longitud de cada uno:

$$P = 4\,(5) = 20 \text{ cm}$$

El área es equivalente al cuadrado del lado.

$$A = l^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

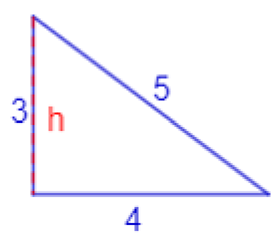
2. Determine el área y el perímetro del siguiente rectángulo.



$$P = 2(10) + 2\,(6) = 20 + 12 = 32 \text{ cm}$$

$$A = 10\,(6) = 60 \text{ cm}^2$$

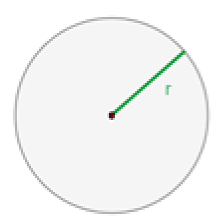
3. Determine el área y el perímetro del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 es :



$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ Unidades cuadradas } (u^2)$$

$$P = 3+4+5 = 12 \text{ unidades (u)}$$

4. Calcular el área de un círculo de 5 m de radio y la longitud de su circunferencia.



$A = \pi(5^2) = 25\,\pi$ metros cuadrados
$P = 2\,\pi\,(5) = 10\,\pi$ *metros*

7.4. HOJA DE EJERCICIOS 7: GEOMETRÍA PLANA

TEOREMA DE PITÁGORAS, ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS BÁSICAS

1. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 centímetros.
2. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm cada uno.
3. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\sqrt{4}$ y $\sqrt{5}$.
4. Calcular el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 35 cm y el otro cateto mide 17 cm.
5. Calcular la altura que se puede alcanzar con una escalera de 5 m apoyada sobre una pared si la parte inferior se sitúa a 1.2 m de esta.
6. Usted puede ver que en las tiendas de electrodomésticos los televisores se ofrecen indicando la cantidad de pulgadas que tiene la pantalla. Esta longitud representa la diagonal que va desde una esquina del televisor hacia la otra. Si David desea colocar un televisor en un espacio de 96 cm x 79 cm, ¿de cuántas pulgadas debe ser la pantalla del televisor? Tome en cuenta que 1 pulgada es equivalente a 2.54 cm.
7. Se desea instalar un canopy desde la rama de un árbol ubicada a una altura de 35 m hasta un punto a nivel del suelo a 200 metros del árbol. Considerando que el suelo es plano, ¿cuál es la longitud del cable que debe utilizarse?
8. Calcule el área de un triángulo de base 12 pulgadas y altura de 20 cm.
9. ¿Cuál es el área y perímetro de un cuadrado cuyo lado mide 17 cm?
10. Si un cuadrado tiene un área de 81 cm2, ¿cuánto mide cada uno de sus lados y su perímetro?
11. ¿Cuál es el área y perímetro de un rectángulo cuyos lados (perpendiculares) miden 7 cm y 15 cm?
12. Si un rectángulo tiene un perímetro de 54 cm y uno de sus lados mide 12 cm, ¿cuánto mide su otro lado (perpendicular al primero) y de cuánto es su área?
13. ¿Cuál es el área y perímetro de un trapecio isósceles cuya medidas son: base mayor de 10 m, base menor de 7 m y altura de 5 m?
14. ¿Cuál es el área y perímetro en pies de un trapecio isósceles cuya medidas son: base mayor de 12 m, base menor de 7 m y altura de 4 m?
15. ¿Cuál es el área y perímetro de un rombo cuya diagonal mayor es de 15 pulgadas y cuya diagonal menor es de 10 pulgadas?
16. ¿Cuál es el área y perímetro en centímetros de un rombo cuya diagonal mayor es de 21 pulgadas y cuya diagonal menor es de 8 pulgadas?
17. Calcule el área y perímetro de un pentágono cuyo lado mide 7 cm y cuyo apotema mide 4 cm.
18. Calcule el área y perímetro en pulgadas de un pentágono que tiene 8 cm por lado y 5 cm de apotema.
19. Calcule el área y perímetro de un hexágono que tiene 16 cm por lado y 8 cm de apotema.
20. Un hexágono tiene un perímetro de 30 pies y un apotema de 3 pies. Calcule la longitud de cada lado y su área en pulgadas cuadradas.
21. Calcule el área y perímetro en metros de un círculo que tiene un radio de 14 pies.
22. Calcule el radio y perímetro en pies de un círculo cuya área es equivalente a 30 metros cuadrados.

Respuestas de los ejercicios pares:

2. 83 cm
4. 30.59 cm
6. 48.95 cm
8. 304.8 cm^2 ó 27.24 $pulg^2$.

10. 9 cm y 36 cm.
12. 15 cm y 180 cm^2.
14. 408.82 pie^2 y 93.26 pies.
16. 541.93 cm^2 y 114.16 cm.
18. 15.5 $pulg^2$ y 15.75 pulg.
20. 60 pulg y 6,480 $pulg^2$.
22. 10.14 pies y 63.69 pies.

7.5. EVALUACIÓN 7: GEOMETRÍA PLANA

TEOREMA DE PITÁGORAS, ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS BÁSICAS

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene catetos de 3.8 y 4.58 m?

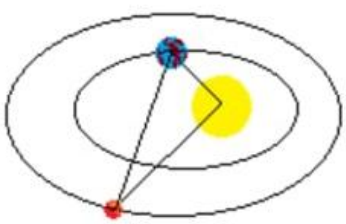
a) 5.68 m b) 5.95 cm c) 2.75 m d) Ninguna de las anteriores

b) ¿Cuánto mide el cateto de un triángulo cuya hipotenusa mide 8.75 m y uno de sus catetos mide 10 m?

a) 13.29 m b) 4.84 m c) – 4.84 m d) Ninguna de las anteriores

(*tome en cuenta que la hipotenusa no puede ser menor que alguno de sus catetos)

c) Suponiendo que la tierra (azul), marte (rojo) y el sol (amarillo) se encuentran por un momento formando un triángulo rectángulo. Calcule la distancia entre la tierra y marte sabiendo que la distancia entre la tierra y el sol es de 150 millones de kilómetros y la distancia entre marte y el sol es de 225 millones de kilómetros.



a) 270.42 millones km b) 250 km c) 250 años luz d) Ninguna de las anteriores

d) Calcule el área de un triángulo de base 12 pulgadas y altura de 1.5 pies cm.

a) 9 $pulg^2$ b) 9 cm^2 c) 216 $pulg^2$ d) 0.75 pie^2

e) Si un cuadrado tiene un área de 114 cm2, ¿cuánto mide su perímetro?

a) 28.5 cm b) 42.71 cm^2 c) 16.81 pulg d) 10.68 cm

f) ¿Cuál es el perímetro de un trapecio isósceles cuya medidas son: base mayor de 15 m, base menor de 8 m y altura de 5 m?

a) 35.21 m b) 57.5 m c) 93 m d) 6.10 m

g) Calcule el perímetro de un círculo cuya área es equivalente a 100 metros cuadrados.

a) 10 m b) 13.96 pulg c) 35.45 cm d) 78.74 pulg

Respuesta de la evaluación:

1.d
2.d
3.a
4. d
5. c
6. a
7. b

PARTE 2. CONJUNTOS NUMÉRICOS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS

153

1. DESARROLLO DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Un sistema de numeración es un conjunto de números y reglas que sirven para determinar todos los números válidos dentro del mismo sistema. Existen muchos sistemas de numeración, los cuales tienen sus propios signos, relaciones, convenios y normas. Su desarrollo se ha dado acorde al desarrollo cognitivo del ser humano en cada civilización y puede ser:

a. Por los instrumentos que ha utilizado el hombre para contar

Durante su desarrollo, el ser humano ha creado instrumentos que le han permitido contar y descubrir las relaciones entre los números según sus sistemas de numeración. En la era primitiva se utilizaron los elementos naturales disponibles como piedras para realizar marcas en los árboles, o bien algunas pinturas para marcar las paredes de las cavernas. Poco a poco se fue evolucionando y se creó el ábaco, un instrumento muy utilizado en la antigua Mesopotamia y en Mesoamérica para realizar operaciones aritméticas sencillas.

Marcas en arboles Piedras Manos	→	Abaco	→	Maquinas para Calcular	→	Computadora

Posteriormente se fueron desarrollando máquinas que utilizaban engranajes para desarrollar cálculos más complejos. Un ejemplo de la antigüedad es el mecanismo de Anticitera, que es considerada “una computadora mecánica”, muy adelantada para su tiempo. Después, el ser humano desarrolló calculadoras mecánicas, digitales y la computadora. ¿Qué se desarrollará después?

b. Por los sistemas de numeración que han creado las civilizaciones

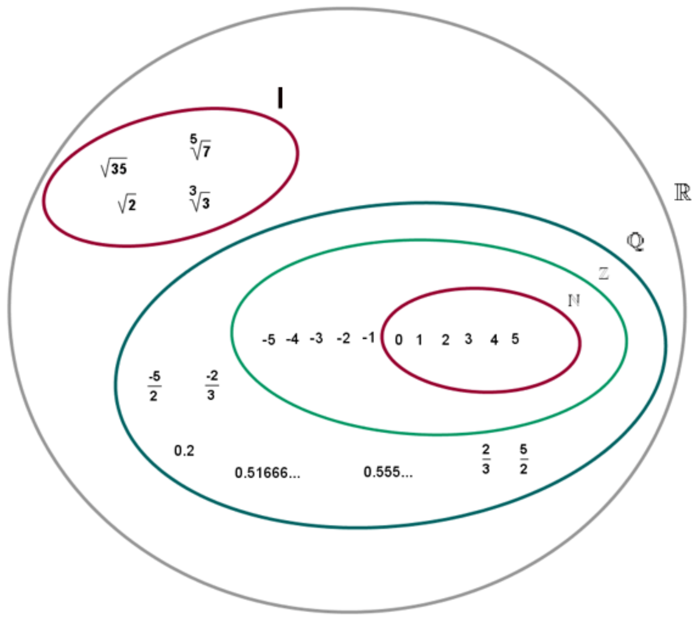
Cada civilización ha tenido su propio desarrollo cognitivo, es decir, ha desarrollado sus propios conocimientos de acuerdo al lugar y a los elementos naturales con los que se ha relacionado. De esta manera, cada civilización ha desarrollado su propio sistema de numeración con sus propias reglas. Entre éstos se ha de destacar el sistema Maya, civilización que consideró al “cero” como un número. Hoy en día, en un mundo más globalizado, el sistema que más se utiliza es el decimal, que para representar a los números utiliza 10 símbolos y entre ellos toma en cuenta al cero.

BABILONICO		**EGIPCIO**		**MAYA**		**BINARIO**		**HEXADECIMAL**		**DECIMAL**
5,000 a.C. Posicional Base 60 3 símbolos Sin cero	→	3,000 a.C. No Posicional Base 10 7 símbolos Sin Cero	→	300 a.C. Posicional Base 20 3 símbolos Con cero	→	300-1,900 d. de C Posicional Base 2 2 símbolos Con cero	→	400 d. de C Posicional Base 16 16 símbolos Con cero	→	800 d. C Posicional Base 10 Símbolos 10 Con cero

2. CLASIFICACIÓN DEL CONJUNTO DE NÚMEROS

Los números se pueden clasificar. El conjunto que los contiene a todos es el conjunto de los números complejos, el cual tiene dos subconjuntos: 1) Números reales (R) y 2) Números imaginarios (I).

El que nos interesa para esta guía es el conjunto de los números reales, que contiene a los números Irracionales (I) y los números Racionales (Q). Estos últimos se pueden clasificar en números Enteros (Z) y números Naturales (N).



Fuente: recuperado de https://bit.ly/2B5yIB0

A continuación se detalla cada uno de estos conjuntos y sus propiedades más importantes:

2.1. NÚMEROS NATURALES (N)

Son los números que se usan para contar. Por ejemplo, cuando se cuentan 5 manzanas, 20 patos, etc. Estos números se cuentan de unidad en unidad, es decir, no hay fracciones ni decimales. Se puede representar simbólicamente como:

N = { 0, 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7,……………………………….}

En nuestro caso incluiremos al cero como un número natural.

2.1.1. RECTA NUMÉRICA

La recta numérica es un gráfico. Se dibuja una línea y se colocan los números separados por distancias iguales. La recta numérica de los números naturales es la siguiente:

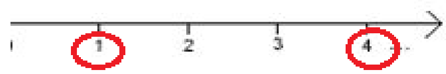
Fuente: recuperado de https://bit.ly/2YM1Dsy

2.1.2. ORDEN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Al comparar dos números naturales a y b entre ellos se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

- ✓ **a > b** (a es mayor que b), si al representarlos gráficamente en la recta numérica, **a** se encuentra a la derecha de **b**.
- ✓ **a < b** (a es menor que b), si al representarlos gráficamente sobre la recta numérica, **a** se encuentra ubicado a la izquierda de **b**.
- ✓ **a = b** (a es igual a b), si al representarlos en la recta numérica, a **a** y a **b** les corresponde el mismo punto.

¿Qué número es menor 4 o 1?



1 es menor que 4, porque está a la izquierda que el 4

Fuente: recuperado de https://bit.ly/2KITRpl

2.1.3. OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

A. ADICIÓN

a + b = c   donde a, b y c representan a cualquier número natural.
a y b son los sumandos y c suma o total

Propiedades de la adición:

a. Clausurativa (Cerradura): La suma de dos naturales es siempre otro número natural.

$$a + b = c$$

Ejemplo

$$3 + 5 = 8$$

b. **Conmutativa:** El orden en el que se realiza la suma de dos números naturales no altera el resultado. El orden de los sumandos no altera la suma.

$$a + b = b + a$$

Ejemplo

$$2 + 7 = 7 + 2$$
$$9 = 9$$

c. **Asociativa:** Al agrupar los sumandos de diferente forma, siempre se obtiene el mismo resultado.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejemplo

$$(5+16) + 4 = 5 + (16+4)$$
$$(21) + 4 = 5 + (20)$$
$$25 = 25$$

d. **Elemento neutro (Modulativa):** La suma de cualquier número natural con el cero da como resultado el mismo número natural. El elemento neutro de la suma es el cero.

$$a + 0 = 0 + a$$

Ejemplo

$$9 + 0 = 0 + 9$$
$$9 = 9$$

B. SUSTRACCIÓN

$a - b = c$, donde a, b y c representan a cualquier número natural.
a es el minuendo, b el sustraendo y c la diferencia.

C. MULTIPLICACIÓN

$a \times b = c$, donde a, b y c representan a cualquier numero natural
a y b son factores y c producto.

Otros signos utilizados en la multiplicación: • , * , ( ) , [ ] , y { }

Propiedades de la multiplicación:

a. **Clausurativa:** La multiplicación de dos números naturales siempre da como resultado un número natural.

$$a \times b = c$$

Ejemplo $10 \times 7 = 70$

b. **Conmutativa:** El orden en el que se realice la multiplicación no altera el resultado.
El orden de los factores no altera el producto.

$$a \times b = b \times a$$

Ejemplo $18 \times 3 = 3 \times 18$
$54 = 54$

c. **Asociativa:** No importa cómo se agrupen los factores el producto es igual.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Ejemplo $(8 \times 5) \times 2 = 8 \times (5 \times 2)$
$(40) \times 2 = 8 \times (10)$
$80 = 80$

d. **Elemento neutro:** El producto de un número natural con uno da como resultado el mismo número natural.
El elemento neutro de la multiplicación es el uno.

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

Ejemplo $6 \times 1 = 6$

e. **Anulativa:** Todo número multiplicado por cero da cero.

a x 0 = 0 x a = 0

Ejemplo 15 x 0 = 0

f. Distributiva:

Con respecto a la suma: a x (b + c) = a x b + a x c

Ejemplo 4 x (10 + 5) = 4 x 10 + 4 x 5 = 40 + 20 = 60

Con respecto a la resta: a x (b – c) = a x b – a x c

Ejemplo 6 x (12 – 8) = 6 x 12 – 6 x 8 = 72 – 48 = 24

D. DIVISIÓN

$$d \,\overline{\big|\, D}\begin{matrix} C \\ \\ R \end{matrix}$$

, donde d es el divisor, D el dividendo, C el cociente y R el residuo.

Otros símbolos utilizados en la división: ÷, / , **:** , y ___

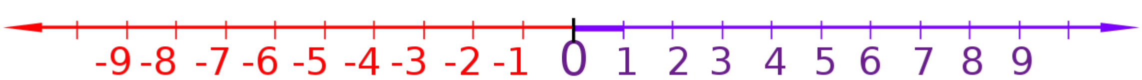
2.2. NÚMEROS ENTEROS (Z)

El conjunto de los números enteros contiene a los números naturales, sus opuestos (números negativos) y el cero. Al igual que los números naturales, se cuentan de unidad en unidad. Simbólicamente, se puede representar como:

Z = {………-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ………}

2.2.1. RECTA NUMÉRICA

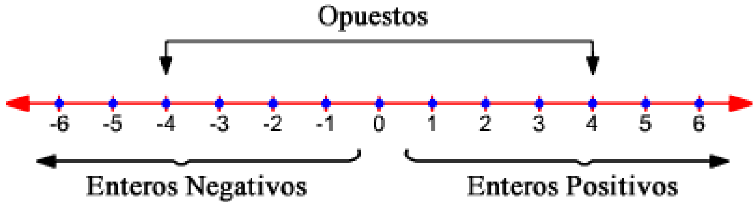
En la recta numérica, los números enteros se representan así:



Fuente: recuperado de https://bit.ly/2YKVyMJ

2.2.2. NÚMEROS OPUESTOS

Dos números enteros se llaman así si están a la misma distancia de cero y tienen diferente signo. Es decir, el opuesto de **a** es **–a**. En la siguiente figura se puede ver que 4 y -4 son números opuestos, puesto que ambos están a cuatro unidades de distancia del cero, pero uno es positivo y el otro es negativo.



Fuente: recuperado de https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/integers

2.2.3. VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

Si **a ε Z**, el valor absoluto de **a** se nota **I a I** y es la distancia que existe entre **a** y el **cero**. Por ejemplo, en la siguiente figura se puede observar que el valor absoluto de -3 es 3, y el valor absoluto de 3 también es 3. Esto es debido a que, sin importar el signo que tengan, ambos números están a 3 unidades de distancia del cero.

Fuente: recuperado de https://bit.ly/31HRw53

(El valor absoluto de 0 es 0)

2.2.4. ORDEN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Al comparar dos números enteros a y b, entre ellos se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

- ✓ **a > b** , **a** es mayor que **b**, si al representarlos en la recta numérica, **a** se encuentra a la derecha de **b**.
- ✓ **a < b** , **a** es menor que **b**, si al representarlos gráficamente sobre la recta numérica, **a** se encuentra a la Izquierda de **b**.
- ✓ **a = b**, **a** es igual a **b**, si al representarlos en la recta numérica, a **a** y **b** le corresponde el mismo punto.

2.2.5. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ENTEROS

A. ADICIÓN

CASO 1: Adición de dos números enteros de igual signo:
Se suman los valores absolutos de los sumandos y, al resultado, se le antepone el signo común de los sumandos.

Ejemplos: a). 2 + 4 = 6 b) -8 + -19 = -27

CASO 2: Adición de dos números enteros de diferente signo:

Se restan los valores absolutos de los sumandos y al resultado se le antepone el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplos: a). -14 + 3 = -11 b). -10 + 25 = 15

Propiedades de adición de los números enteros:

Además de las 4 propiedades de la adición de los números naturales se agrega la siguiente propiedad.

e. **Inverso aditivo u opuesto:** Todo número entero sumado con su opuesto da como resultado cero.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Ejemplo 5 + (-5) = 0

B. SUSTRACCIÓN

Para encontrar la diferencia de dos números enteros, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo. Es decir, a – b = a + (-b).

Ejemplos

a). 34 - 12 = 34 + (-12) = 22

b). 35 – 50 = 35 + (-50) = -15

c). - 25 – 15 = -25 + (-15) = -40

d). 22 - (-10) = 22 + (10) = 32

Supresión de signos de agrupación:

En las expresiones en las cuales se combinan adiciones y sustracciones con números enteros, se utilizan signos de agrupación con el fin de diferenciar el signo del número con respecto al signo de la operación.

Para resolver expresiones de esta clase, se deben eliminar los signos de agrupación teniendo en cuenta lo siguiente:

- ✓ Cuando el signo de agrupación esta precedido por el signo +, se suprime dejando las cantidades que están en su interior con el mismo signo.

Ejemplo

a). (35) + (20) = 35 + 20 = 55

b). (16) + (- 30) = 16 – 30 = -14

c). (-60) + (90) = -60 + 90 = 30

d). (-46) + (-34) = -46 – 34 = - 80

- ✓ Cuando un signo de agrupación va precedido por el signo - , se suprime cambiando de signo las cantidades que se encuentran en su interior.

Ejemplo

a). 78 – (43) = 78 – 43 = 35

b). 11 – (- 44) = 11 + 44 = 55

C. MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar dos números enteros se debe tener en cuenta lo siguiente:

. Si los números tienen el mismo signo, se multiplican los valores absolutos de cada factor y el producto respectivo es positivo.

Ejemplos:

a). 12 x 5 = 50 b). (-120) x (-3) = 360

. Si los números son de distinto signo, se multiplican los valores absolutos de los factores y el respectivo producto es negativo.

Ejemplos:

a). 33 x (-10) = -330 b). (-60) x 4 = -240

Propiedades de la multiplicación:

Las propiedades que tiene la multiplicación de los números enteros son las 6 que tienen los números naturales**.**

D. DIVISIÓN

Si a, **b ε Z** con **b ≠ 0** se llama cociente exacto de **a** y **b** al número **c ε Z** tal que **b * c = a**

Para hallar el cociente entre dos números enteros se debe de considerar:

- ✓ El cociente de dos números enteros de igual signo es positivo.

  Ejemplo a). 12/4 = 3 b). (-50) / (-5) = 10

- ✓ El cociente de dos números enteros de distinto signo es negativo.

  Ejemplo a). (-44) / 11 = - 4 b). 360 / (-180) = - 2

- ✓ El cociente de cualquier número entero distinto de cero entre uno es el mismo número entero:

  Ejemplo a ÷ 1 = a

- ✓ El cociente de cero entre cualquier número entero diferente de cero es cero:

  Ejemplo 0 ÷ a = 0

- ✓ El cociente de cualquier número entero entre cero no está definido (indefinido)

  Ejemplo a ÷ 0 = Indefinido

- ✓ El cociente de cero dentro de cero es indeterminado.

  Ejemplo 0 ÷ 0 = Indeterminado

2.2.6. JERARQUÍA OPERATIVA:

Norma matemática que nos indica el orden en el cual deben realizarse las operaciones dentro de un complejo de estas, de acuerdo a niveles jerárquicos esta:

Nivel 1:	Se simplifican y se verifican las operaciones contenidas en símbolos de agrupación más internos; luego los más externos. Generalmente en este orden de símbolos. a. ( ) b. [ ] c. { }
Nivel 2:	Funciones
Nivel 3:	Potencias y radicales
Nivel 4:	Multiplicación y división
Nivel 5:	Suma y resta

En ausencia de símbolos de agrupación, por ejemplo, la multiplicación debe de realizarse antes que la adición o la sustracción. **Para operaciones que están en el mismo nivel jerárquico se procede de izquierda a derecha** (Esto significa que tendrá prioridad aquella operación que en su momento aparezca más a la izquierda).

Ejemplos

Aplique jerarquía operativa para determinar el resultado correcto:

a. 25 + 3 x 2	Primero se multiplica
25 + 6	Luego se suma
31	**Respuesta**
b. 30 ÷ 15 – 8	Primero se divide
2 – 8	Luego restamos
– 6	**Respuesta**
c. 13 x 11 x 2 ÷ (18 ÷ 9)	Primero se resuelva la operación que está entre paréntesis
13 x 11 x 2 ÷ 2	Después se multiplica (operando de izquierda a derecha)
286 ÷ 2	Finalmente se divide
143	**Respuesta**

d. **15 – 2 [41 – 6 (3 x4 – 7)]** Primero se opera el paréntesis (primero la multiplicación)

15 – 2 [41 – 6 (12 – 7)] Después operamos la sustracción del paréntesis

15 – 2 [41 – 6 (5)] Seguimos con las operaciones entre corchetes primero la multiplicación

15 – 2 [41 - 30] Luego la sustracción que esta entre corchetes

15 – 2 [11] Multiplicamos antes de restar

15 – 22 Restamos

- 7 **Respuesta**

e. **[(2) + (-7)] [(8) – (10)] – 16 x 3 ÷ [(-3) – (9)] [(4) - (-2)]** Primero se suprimen paréntesis

[2 - 7] [8 - 10] - 16 x 3 ÷ [-3 - 9] [4 + 2] Se operan corchetes

[- 5] [- 2] - 16 x 3 ÷ [- 12] [6] Se opera [-5] [-2]

10 - 16 x 3 ÷ [- 12] [6] Como la multiplicación y la división tienen igual jerarquía se opera de izquierda a la derecha en el orden que aparezcan las operaciones.

10 - 48 ÷ [-12] [6]

10 + 4 [6]

10 + 24

34 **Respuesta**

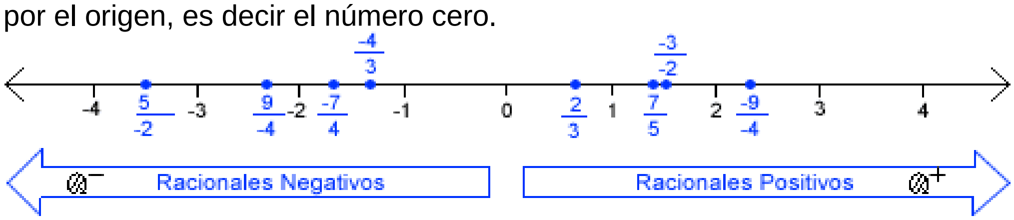
2.3. NÚMEROS RACIONALES (Q)

Los números racionales, son el conjunto de números fraccionarios y números enteros representados por medio de fracciones. Este conjunto está situado en la recta real numérica, pero a diferencia de los números naturales que son consecutivos, los números racionales no poseen consecución pues entre cada número racional existen infinitos números que solo podrían ser escritos durante toda la eternidad.

$$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \middle| (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0} \wedge \boldsymbol{mcd}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{1}\right\}$$

2.3.1. RECTA NUMÉRICA

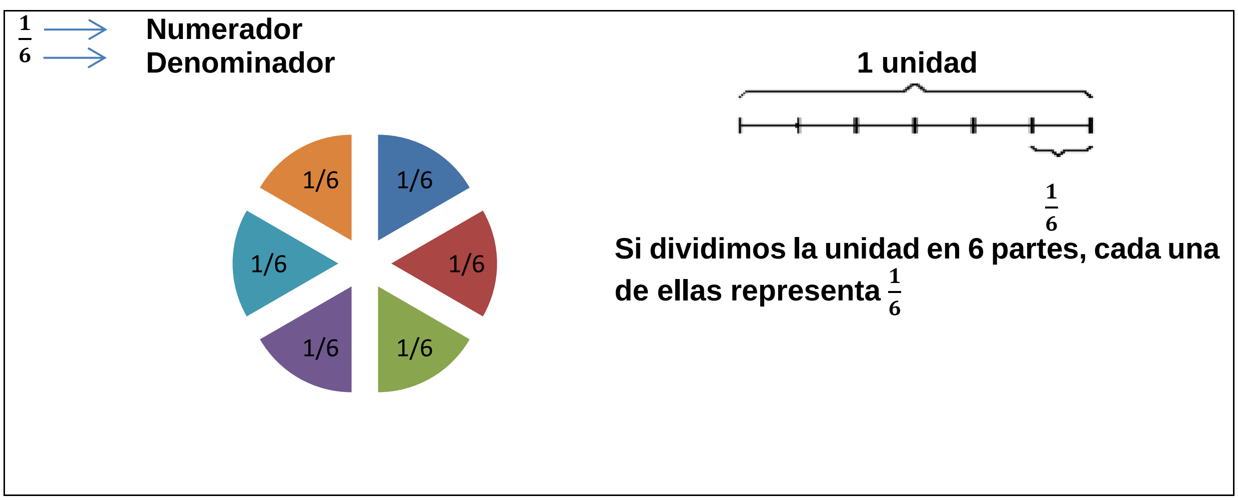
Es un gráfico unidimensional de una línea en la que los números enteros son mostrados como puntos especialmente marcados que están separados uniformemente. La recta numérica incluye todos los números reales, continuando ilimitadamente en cada sentido. Está dividida en dos mitades simétricas por el origen, es decir el número cero.



Fuente: elaboración propia.

2.3.2. ELEMENTOS DE UNA FRACCIÓN

Una fracción consta de dos términos, llamados numerador y denominador. El denominador indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad principal, y el numerador, cuántas de esas partes se toman.



Fuente: elaboración propia.

2.3.3. TIPOS DE FRACCIONES

A. Fracciones propias e impropias

Las fracciones impropias son las que tienen el numerador más grande que el denominador.

Ejemplo: $\frac{4}{3}$

Las fracciones propias son las que tienen el denominador más grande que el numerador.

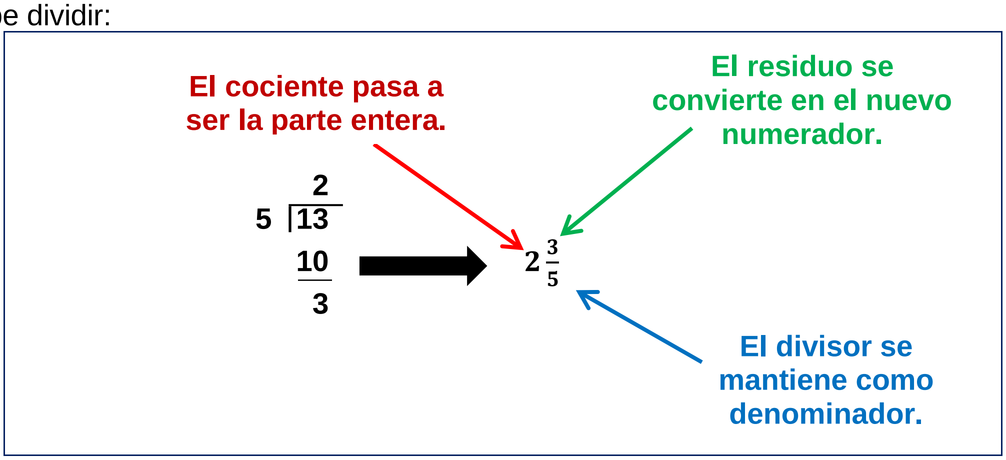
Ejemplo: $\frac{5}{9}$

2.3.4. NÚMERO MIXTO

De fracción impropia a número mixto

Sea $\frac{13}{5}$

Como el numerador (13) es mayor que el denominador (5), se trata de una fracción impropia, por lo que se debe dividir:



Fuente: elaboración propia.

De número mixto a fracción impropia

Se multiplica la parte entera por el denominador de la parte fraccionaria y se le suma el numerador de la parte fraccionaria y el denominador de la parte fraccionaria divide a todo.

$$2\frac{3}{4} = \frac{(2 * 4) + 3}{4}$$

$$2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

2.3.5. NÚMEROS RACIONALES DECIMALES

Están formados por una parte entera y una parte decimal.

Centenas	Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas
1	2	5.	4	7	9

Parte entera **Parte decimal**

Como se lee: 125 enteros 479 milésimas

Decimales

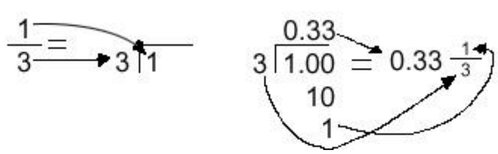
0.573

Unidades $\frac{1}{1}$ **Décima** $\frac{1}{10}$ **Centésima** $\frac{1}{100}$ **Milésima** $\frac{1}{1000}$

Como se lee: 573 milésimas

A. EXPRESIÓN DE FRACCIONES COMO NÚMEROS DECIMALES

Para expresar números racionales en forma decimal se divide el numerador entre el denominador, y el cociente que se obtiene es un numero racional decimal.



$\frac{1}{3} = 0.3$

$\frac{1}{2} = 0.5$

B. REPRESENTACION DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL

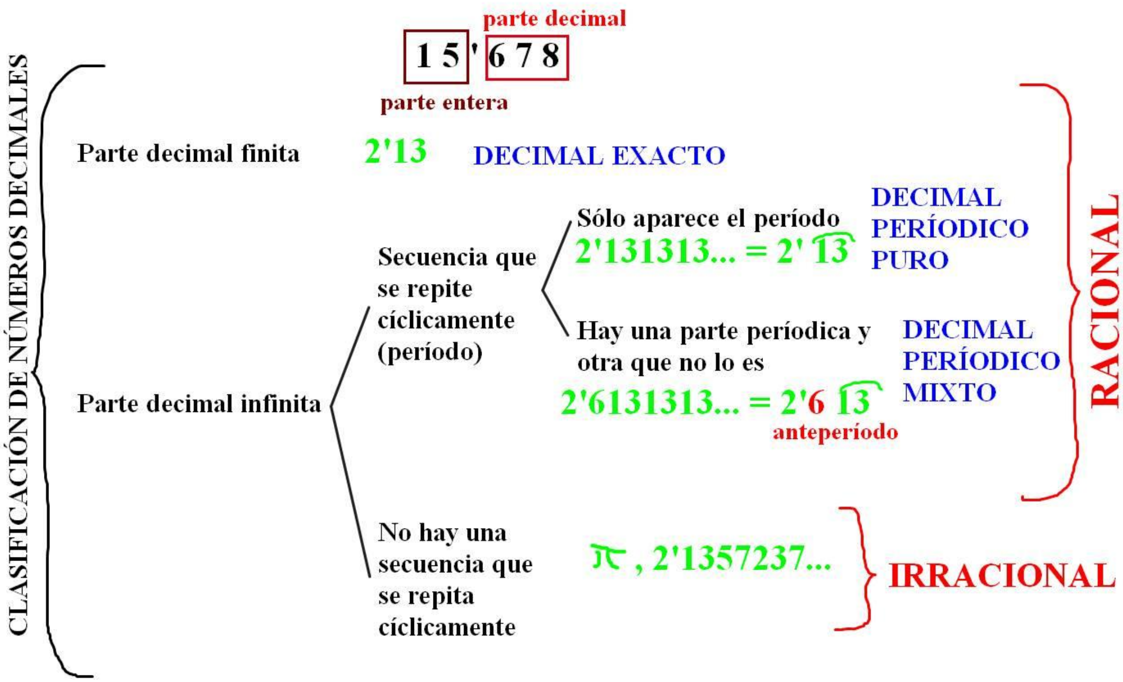
Las fracciones racionales $\frac{7}{10}, \frac{17}{100}, \frac{9}{1000}$, cuyo denominador es una potencia de 10, se les conocen como fracciones decimales.

$$\frac{6}{10} = 0.6 \text{ (seis décimas)}$$

$$\frac{4}{100} = 0.04 \text{ (cuatro centésimas)}$$

$$\frac{13}{1000} = 0.013 \text{ (trece milésimas)}$$

C. CLASIFICACION DE LOS NÚMEROS RACIONALES DECIMALES



Fuente: Recuperado de http://masmates-igv-2bach.blogspot.com/2010/11/blog-post_22.html

D. CONVERSIÓN DE DECIMAL A RACIONAL

a. De decimal exacto a fracción irreducible

Se escribe en el numerador el número completo sin el punto decimal y en el denominador se escribe un uno y se agregan tantos ceros como cifras (dígitos) tenga la parte decimal. Finalmente, si es posible, se simplifica.

Por ejemplo:

$$\mathbf{0.32 = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}}$$

$$\mathbf{0.08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}}$$

b. De decimal periódico puro a fracción irreducible

En el numerador se escribe el número completo sin el punto decimal y se le resta la parte no periódica, en el denominador se agregar tantos nueves como cifras tenga la parte periódica. Finalmente se simplifica si es posible.

Por ejemplo:

a) $\mathbf{57.\overline{18} = \frac{5718-57}{99} = \frac{5661_{\div 9}}{99_{\div 9}} = \frac{629}{11}}$

b) $\mathbf{1.\overline{13} = \frac{113-1}{99} = \frac{112}{99}}$

c) $\mathbf{0.\overline{1769} = \frac{1769}{9999}}$

d) $\mathbf{2234.\overline{1} = \frac{22341-2234}{9} = \frac{20107}{9}}$

c. De decimal periódico mixto a fracción irreducible

En el numerador se escribe el número completo sin el punto decimal y se le resta la parte no periódica, en el denominador se agregan tantos nueves como cifras tenga la parte periódica y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica que se encuentra después del punto decimal.

a) $\mathbf{0.424\overline{8}\ldots = \frac{4248-424}{9000} = \frac{3824}{9000} = \frac{478}{1125}}$

b) $\mathbf{0.5\overline{8}\ldots = \frac{58-5}{90} = \frac{53}{90}}$

c) $\mathbf{0.3\overline{42}\ldots = \frac{342-3}{990} = \frac{339}{990} = \frac{113}{330}}$

2.3.6. FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS

A. MULTIPLO: M

El múltiplo de un número natural es el producto de este número por cualquier número natural empezando por el cero. Es un conjunto infinito.

Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene un número exacto de veces. Por ejemplo: 4 es múltiplo de 2 porque lo contiene 2 veces. Para obtener los múltiplos de un número, lo multiplicamos por cada uno de los números naturales.

4*0	4*1	4*2	4*3	4*4	4*5	4*6	4*7	4*8	…
0	4	8	12	16	20	24	28	32	…

B. DIVISOR: D

Divisor de un número natural es aquel que divide a este número en forma exacta. Es un conjunto finito.

$$\mathbf{D18 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}}$$

C. NÚMERO PRIMO:

Son los números que tienen dos divisores la unidad y el mismo número.

NÚMEROS PRIMOS EN ROJO									
0	1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**
20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**
30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39
40	**41**	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49
50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**
60	**61**	62	63	64	65	66	**67**	68	69
70	**71**	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**
80	81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**
90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	99

D. NÚMERO COMPUESTO

Es el número que tiene más de dos divisores. Ejemplos: 4, 6, 8, 9 y 10.

Números	Divisores
4	**1, 2, 4**
6	**1, 2, 3, 6**
8	**1, 2, 4, 8**
9	**1, 3, 9**
10	**1, 2, 5, 10**

E. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD:

Un número es divisible exactamente entre:

Número	Criterio
2	Si el número termina en cero o cifra par (el cero se considera par)
3	Si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3
4	Si el número formado por las dos últimas cifras es un múltiplo de 4 o cuando termina en doble cero.
5	Si la última cifra es 0 o 5.
6	Si el número es divisible por 2 y 3.
7	Si al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es múltiplo de 7.
8	Si el número formado por las tres últimas cifras es un múltiplo de 8.
9	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
10	Si la última cifra es 0.
11	Si sumando las cifras del número en posición impar por un lado y las de posición par por otro. Luego se resta el resultado de ambas sumas obtenidas. Si el resultado es 0 o un múltiplo de 11, el número es divisible por este.
12	Si el número es divisible por 3 y 4
13	Si al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 9 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 13.
17	Si al separar la última cifra de la derecha multiplicarla por 5 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 17.

F. FACTORIZACION EN PRIMOS (DESCOMPOSICION FACTORIAL)

Teorema fundamental de la aritmética.

Consiste en expresar un número compuesto como producto de factores primos.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	-

60 = 2×2×3×5 60 = 2^2×3×5

G. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El mcm de dos o más números es el producto de sus divisores primos comunes y no comunes.

27	**45**	3
9	15	3
3	5	3
1	5	5
1	1	-

MCM (27, 45) = **3×3×3×5** = **135**
MCM (27, 45) = **3^3×5 = 135**

Multiplos de 3

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 ...

Multiplos de 4

0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 ...

El MCM de 3 y 4 es 12

H. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD):

El MCD de dos o más números es el producto de sus divisores primos comunes.
Calcula, el MCD de los siguientes números:

60	**150**	**360**	2
30	75	180	3
10	25	60	5
2	5	30	-

MCM (60, 150, 360) = **2×3×5** =**30**

MÁXIMO COMÚN DIVISOR
FORMA LARGA

Div (12)____{1, 2, 3, 4, 6, 12}

Div (18)____{1, 2, 3, 6, 9, 18}

m.c.d (12,18)= 6

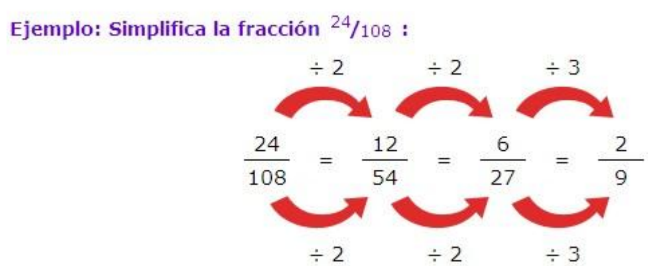
I. PRIMOS RELATIVOS:

Números primos entre sí (P.E.S.I.)

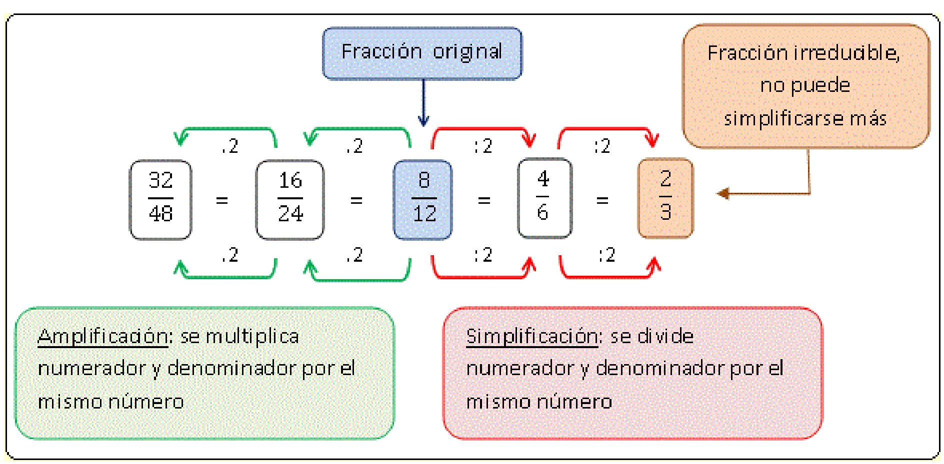
Se les denomina también primos relativos o coprimos, y son aquellos números que tienen como único divisor común a la unidad.
Ejemplo: 6, 14, 21 son números P.E.S.I.

Divisores:
6_____ {**1**, 2, 3, 6}
14____ {**1**, 2, 7, 14}
21____ {**1**, 3, 7, 21}
…Porque el único divisor común es 1.

2.3.7. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES



$$\frac{12}{36} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3} = \frac{1}{3}$$



Fuente: recuperado de https://fatimatematica.wordpress.com/fracciones/fraccion-equivalente-fraccion-irreducible/

2.3.8. OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Como regla general, en cálculos aritméticos con números racionales, primero se deben de simplificar las fracciones si es posible y, después de operar vuelva a simplificar si es posible (S.O.S)

A. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

Se suman o se restan los valores correspondientes a los numeradores y se deja el mismo denominador.

A. $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{+3+7}{8}=\frac{10}{8}$

B. $\frac{9}{11}-\frac{5}{11}=\frac{+9-5}{11}=\frac{4}{11}$

C. $-\frac{6}{5}+\frac{13}{5}=\frac{-6+13}{5}=\frac{7}{5}$

D. $-\frac{1}{7}-\frac{6}{7}+\frac{11}{7}=\frac{-1-6+11}{7}=\frac{4}{7}$

B. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES CON DIFERENTE DENOMINADOR

a. Primera forma

Ejemplo :

$\frac{7}{12}+\frac{3}{9}-\frac{4}{24}$ **Primero simplificamos numerador con denominador de la misma fraccion** y luego seguimos operando. La segunda fraccion dividimos el numerador y denominador dentro de 3 y la tercera fraccion dividimos numerador y denominador dentro de 4.

$\frac{7}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$ Encontramos el mcm de los denominadores de las tres fracciones que es 12 y operamos

$\frac{1 \times 7 + 4 \times 1 - 2 \times 1}{12}$ Dividimos el mcm dentro de cada uno de los denominadores de cada una de las fracciones y los multiplicamos por el numerador de cada una de las fracciones colocando antes el signo que separa a cada una de las fracciones y finalmente operamos

$\frac{7+4-2}{12}$

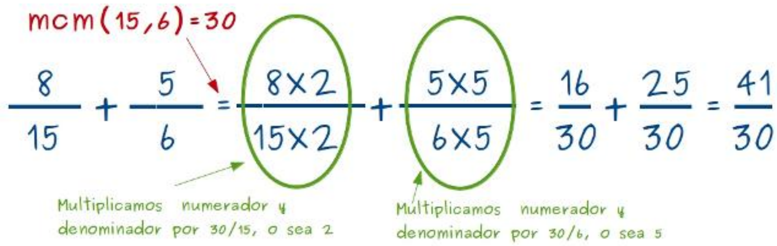
$\frac{9}{12}$ Simplificamos dividiendo numerador y denominador dentro de 3

$\frac{3}{4}$ Obteniendo finalmente la fraccion irreducible (fraccion que ya no es posible simplificar mas)

b. Por fracciones homogéneas

Se expresan las fracciones con igual denominador (Se transforman en fracciones homogéneas). Posteriormente se operan como fracciones con igual denominador (sumando los numeradores y copiando el denominador).

a.



b. $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$

C. INVERSO ADITIVO

Todo número racional sumado son su opuesto da como resultado cero.

Para todo a/b є Q existe (- a/b) є Q tal que a/b + (-a/b) = 0

Ej.: El inverso aditivo de 4/5 es -4/5 porque 4/5 + (- 4/5) = 0

D. MULTIPLICACIÓN DE RACIONALES EN FORMA DE FRACCIÓN:

Primero se simplifica y luego se multiplican los numeradores entre si y los denominadores entre sí. Finalmente se vuelve a simplificar si es necesario.

Ejemplo:

$\frac{4}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{6}$	Se divide dentro de 4 el numerador de la primera fracción (4) y el denominador de la segunda fracción (8). Se divide el numerador (3) y el denominador (6) dentro de 3. **Recuerde que se puede simplificar numerador con denominador de la misma fracción o de distinta fracción**
$\frac{1}{9} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2}$	En la segunda fracción 2/2 es igual a uno
$\frac{1}{9} \times 1 \times \frac{1}{2}$	Se multiplica finalmente solo numeradores con numeradores y denominadores con denominadores
$\frac{1}{18}$	Respuesta final. Nota: Es mejor simplificar primero y luego realizar las multiplicaciones y no al contrario.

E. INVERSO MULTIPLICATIVO

También llamado recíproco.
Todo número racional multiplicado con su reciproco da como resultado 1.

Para todo a/b є Q existe (b/a) є Q tal que a/b x (b/a) = 1

Ejemplos:

$\frac{2}{3}$ es inverso multiplicativo de $\frac{3}{2}$ ya que $\frac{2}{3} * \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$
$\frac{1}{5}$ es inverso multiplicativo de 5 ya que $\frac{1}{5} * 5 = \frac{5}{5} = 1$
8 es inverso multiplicativo de $\frac{1}{8}$ ya que $8 * \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

F. DIVISIÓN DE RACIONALES EN FORMA DE FRACCIÓN

Para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \div \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \times \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}$$

Donde $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ es el dividendo y $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ el divisor.

Ejemplo

$\frac{21}{30} \div \frac{7}{6}$	Utilizando la propiedad del inverso multiplicativo cambiamos el símbolo de la división entre dos fracciones por el de la multiplicación y en la segunda fracción cambiamos el numerador al denominador y el denominador al numerador (Comúnmente se dice que le damos vuelta)
$\frac{21}{30} \times \frac{6}{7}$	**Procedemos a simplificar numerador con denominador de la misma fracción o de distinta fracción**. En este caso se divide dentro de 7 el numerador de la primera fracción (21) y el denominador de la segunda fracción (7). Además dividimos dentro de 6 el denominador de la primera fracción (30) y el numerador de la segunda fracción (6).
$\frac{3}{5} \times \frac{1}{1}$	Finalmente multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador .
$\frac{3}{5}$	

G. FRACCIONES COMPLEJAS

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{7} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{21}{10}$$

Ejemplo

$$\frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 3}$$

Primero simbolizamos cada parte de la fracción con letras A / B y operamos por separado

A: $\frac{5}{2} - \frac{1}{3}$

Simplificamos las fracciones de ser necesario y encontramos el mcm que es 6 y operamos

$$\frac{3x5 - 2 \times 1}{6} = \frac{15 - 2}{6} = \frac{13}{6}$$

B: $\frac{1}{3} + 3$

Simplificamos si fuera posible y operamos mcm 3

$$\frac{1 \times 1 + 3 \times 3}{3} = \frac{1 + 9}{3} = \frac{10}{3}$$

Luego unimos las partes: A/B

$$\frac{\frac{13}{6}}{\frac{10}{3}}.$$

Aplicamos la propiedad del producto de extremos y producto de medios

$$\frac{13 \times 3}{6 \times 10} \qquad \frac{\text{Extremos}}{\text{Medios}}$$

Simplificamos dividiendo el extremo (numerador) 3 y el medio (denominador) 6 dentro de 3.

$$\frac{13 \times 1}{2 \times 10}$$

Finalmente multiplicamos en línea recta horizontal

$$\frac{13}{20}$$

H. POLINOMIOS ARITMÉTICOS

Como regla general, en cálculos aritméticos con números racionales, primero se deben de simplificar las fracciones si es posible y, después de operar vuelva a simplificar si es posible (S.O.S.)

Se debe de tener en cuenta la jerarquía operativa.

Nivel 1: Se simplifican y se verifican las operaciones contenidas en símbolos de agrupación más internos; luego los más externos. Generalmente en este orden de símbolos.

a. ( ) b. [ ] c. { }

Nivel 2: Funciones

Nivel 3: Potencias y radicales

Nivel 4: Multiplicación y división

Nivel 5: Suma y resta

En ausencia de símbolos de agrupación, por ejemplo, la multiplicación, debe de realizarse antes que la adición o la sustracción. Para operaciones que están en el mismo nivel jerárquico se procede de izquierda a derecha (Esto significa que tendrá prioridad aquella operación que en su momento aparezca más a la izquierda).

Ejemplo

a)

$$\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} : \left[\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{4}} \cdot \left(\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{3}}\right)\right]$$

Primero se operan paréntesis y signos de agrupación.

Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{15}{8} : \left[\frac{-50}{12}\right]$$

La fracción resultante se simplifica.

$$\frac{15}{8} : \left[\frac{-25}{6}\right]$$

Se procede a hacer la división, la cual se puede convertir En multiplicación por el inverso multiplicativo.

$$\frac{15}{8} \cdot \left[\frac{6}{-25}\right]$$

$$\frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{-5 \cdot 5}$$

Se pueden factorizar los números para facilitar la simplificación.

$$\frac{\cancel{5} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{-5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2}$$

Se simplifican los términos.

$$\frac{3 \cdot 3}{-5 \cdot 2 \cdot 2}$$

Se realiza la multiplicación.

$$-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}}$$

Resultado.

b)

$2:\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)-3\left(1+\frac{1}{2}\right)$	Se operan paréntesis y signos de agrupación. Se realizan las sumas tomando en cuenta el denominador común.
$2:\left(\frac{1+3}{6}\right)-3\left(\frac{2+1}{2}\right)$	
$2:\left(\frac{4}{6}\right)-3\left(\frac{3}{2}\right)$	Se simplifican las fracciones resultantes y se opera la multiplicación.
$2:\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{9}{2}$	Se realiza la división, la cual se puede realizar multiplicando Con el inverso aditivo.
$2\cdot\frac{3}{2}-\frac{9}{2}$	Se opera primero la multiplicación.
$3-\frac{9}{2}$	Se realiza la resta tomando en cuenta el denominador común
$\frac{6-9}{2}$	Se opera la resta.
$\boldsymbol{\frac{-3}{2}}$	**Resultado**

2.3.9. APLICACIONES DE FRACCIONES, MCD Y MCM

Ejemplos

MCM

1. Tres paisanos del interior de la republica de se van a trabajar fuera de su pueblo en la misma fecha a el departamento de Guatemala. Desde la fecha en la cual partieron juntos, el primero regresa a su pueblo a visitar a su familia cada 15 días, el segundo cada 30 días y el tercero cada 45 días. ¿**A los cuantos días coincidirán por primera vez en su pueblo los tres paisanos?**

15 – 30 – 45	**5**
3 - 6 - 9	**3**
1 - 2 - 3	**2**
1 - 3	**3**
1	

mcm = 5 x 3 x 2 x 3 = 90 días

MCD

2. En el laboratorio de química hay tres recipientes que contienen una solución. La capacidad de los recipientes es de 6,300 mililitros (ml), 5,400 ml y 4,200 ml. La solución se repartirá en probetas igual capacidad y se desea que esta sea la máxima posible. Determine:
   a). ¿Qué capacidad debe de tener cada probeta?
   b). ¿Cuántas probetas son necesarias?

a).

6,300 – 5,400 – 4,200	**100**
63 - 54 - 42	**3**
21 - 18 - 14	

Mcd = 100 x 3 = 300

b). 21+18+14 = **53 probetas de 300 ml cada una**.

FRACCIONES:

1. **Si una persona gasta las 3/5 partes de su sueldo mensual, cuando han transcurrido las 2/3 partes del mes. Considerando que mantiene el mismo patrón de gasto. ¿Con que fracción del sueldo se quedara al final del mes que tiene 30 días? Si la persona recibe un sueldo neto de Q.10,000.00 cada mes, ¿cuánto dinero le quedará al final del mes?**

Dinero gastado: 3/5 x 10,000 = Q.6,000.00

Tiempo trascurrido: 2/3 x 30 = 20 días

Razón de gasto por día = 6,000/20 días = Q.300.00 por día

Dinero que no se ha utilizado = Q.4,000.00

Días que faltan para terminar el mes = 10 días

Dinero gastado en los 10 días que faltan para terminar el mes:
10 días * Q.300.00 = Q.3,000

Gasto total en el mes = Q.9,000.00

Fracción de sueldo que queda al final del mes= 1,000/10,000 = 1/10

2. **El propietario de un terreno ha decidido venderlo en parcelas. Vendió primero 3/7 del mismo, después la mitad de lo restante y aún le quedaron 244 m^2 sin vender. ¿Cuál era la superficie del terreno?**

Fracción del terreno que queda del total del terreno: 7/7 – 3/7 = 4/7

Segunda fracción vendida:

Primer forma:
$1/2 \times 4/7 = 2/7$

Segunda:
$4/7 \div 2 = 2/7$ resto del terreno

Fracción del terreno que se ha vendido = $3/7 + 2/7 = 5/7$

Fracción que queda sin vender = $7/7 – 5/7 = 2/7$ que equivale a $244m^2$

Por lo que $1/7 = 122m^2$

Área total del terreno= $122m^2 \times 7 =$ **$854m^2$**

2.4. HOJA DE TRABAJO

A. Encuentre el valor de las siguientes expresiones:

1) $-20 \div 4 - 6(-5)$
2) $20(-4) \div 10 - 6 \div (5 - 7)$
3) $3 + 2(-2 - 3) - 7(1 - 5)$
4) $2(-2 - 6) - 7 + 4(8 - 1)$
5) $520 + [8 - 3 + \{9 - (4 + 2 - 1)\}]$
6) $2\{9 - 2[(3 + 1) - (1 + 1)]\}$
7) $12 \div 4 \times 3 - 8 \div 4 \times 2$
8) $(26 + 2) \div (-4) - 10(8 - 12)$
9) $18 \div 3 \times 6 - (7 - 35) \div 14$
10) $7 - 3(45 - 5 \times 3^2)^2$
11) $4 \times 3 - 2^2 \times 4 + 7 - 3$
12) $[12 + 4(9 - 2 \times 3)^3] \div 10 - 3$
13) $[-3\{2 - (7 - 5) \div 6\}]^2$
14) $9 + 5 \times 8 - 7 \times 5 - 20$
15) $3 \times 5 - 2 \times 7 + 6 \times 3$

20) $8 \div 2 \times 4 - 6 \div 3 \times 3$
21) $-6(9)(-5) - 10(-7)(-6)$
22) $8 + 2(-4) - 6(7 - 8)$
23) $(-3) - 2\{5 - 3[2 - 2(3 - 6)]\}$
24) $72 \div (-18) \times 4 - (3 - 12) \div (-9)$
25) $8 \times 6 \div 3 - 5(3 - 7)$
26) $(5 - 21) \div (-8) + 3(9 - 1)$
27) $-\{-[3 + (3 - 8) - (-15 + 7) - 4]\}$
28) $[3(9 \times 4 + 3) - 3(4 - 8)] \div 7 \times 7 - (9 + 13 - 18)$
29) $3^2 + 5 - 3[(8 \div 6 \times 4) - 3] + 5^3 - 4^2 \times 7$
30) $(12 \div 6)^2 - 4 \div 2(6 \div 2) + 3^2 + 22 \div 11$
31) $[4^2 - 5(2 \times 3 - 2^2)^3 + 3] \div 3 - 20$
32) $15 - 2[21 - 6(3 \times 5 - 7)]$
33) $\dfrac{(9-4^2)^2}{7} + \dfrac{21(19-4)}{35}$

19) $(5 - 21) \div (-8) + 3(9 - 1)$
16) $[60 \div 4 + (-8 + 3 \times 2)^2(5 + 3 - 25)^3] - 91\{3(14 \div 7 - 3)[3 - 2(8 - 10)^5] - 14\}$
17) $-\{10 - 3 \times 4[17 + 3(5 - 13)] - [-32 + 4(-9 - 2 - 11)(-15 + 11)] \div 5\}$
18) $-\{-[3 + (3 - 8) - (-15 + 7) - 4]\} + 6^4 \div 6^2 - 20 \div 6 \times 7 - (7 - 35) \div 12$
34) $-80 \div \{[-3 - 4(9 - 5)^2 - 3(-7 - 10)] \div 4 - 36 \div 3^2 + 3[5 - (7 - 10)]\}$
35) $\{15 - 7[4 - 2(-18 - 6)] - [18 \times 20 - 7(-2 \times 9 - 11)]\} \div \{15 - 2[14 - 6(5 - 50) + 8(-5 - 3)] - 31\}$
36) $\{15 + (9 - 5)2\}\{(6 \times 4) \times 3 + (5 - 4)(4 - 3)\}$
37) $8 + [9 - \{6 - (5 - 4)\}] + 14 - [11 - \{7 - (3 - 2)\}]$
38) $[(+2) + (-7)][(+8) - (+10)] - 16 \times 3 \div [(-3) - (+9)][(+4) + (-2)]$
39) $18 \div 6 \times [-2(-18 - 6)] - \{(6 \div 3 \times 2 + 5)[-7(-2 \times 9 - 46)]\} \div (-2) \times 15 \div \{[-6(5 - 15)](-5 - 3)\}$

B. Reducir a su mínima expresión las siguientes fracciones, utilizando la definición del MCD.

40) $\dfrac{98}{147}$ 42) $\dfrac{332}{415}$ 44) $\dfrac{623}{979}$ 46) $\dfrac{4359}{11624}$ 48) $\dfrac{1212}{1515}$

41) $\dfrac{1727}{1884}$ 43) $\dfrac{90}{195}$ 45) $\dfrac{225}{360}$ 47) $\dfrac{144}{176}$ 49) $\dfrac{126}{72}$

C. Obtenga los valores de las expresiones siguientes:

50) $\dfrac{9\times8}{18\times6}$ 51) $\dfrac{15-18}{-9}$ 52) $\dfrac{3\times2\times5}{6\times4\times10}$ 53) $\dfrac{-25-36}{5-9}$ 54) $\dfrac{20+7}{-6}$

55) $\frac{7-21}{-7}$ 56) $\frac{8}{4-16}$ 57) $\frac{24-9}{12+3}$ 58) $\frac{18-20}{3+5}$ 59) $\frac{5\times20\times18}{3\times6\times10}$

D. **Obtenga la fracción equivalente de cada uno de los números decimales siguientes:**

60) $0.\overline{6}$ 63) 0.04 66) 3.24 69) $7.\overline{325}$ 72) 0.15

61) $-0.3\overline{25}$ 64) 13.45 67) 1.144 70) -9.16 73) $2.\overline{884}$

62) $0.\overline{39}$ 65) $-7.\overline{7}$ 68) $0.9\overline{58}$ 71) $1.1\overline{6}$ 74) $-5.42\overline{3}$

E. Escriba las siguientes fracciones en forma decimal, indicando el tipo de cifra decimal que poseen.

75) $\frac{3}{2}$ 79) $\frac{23}{15}$ 77) $\frac{7}{9}$ 81) $\frac{7}{8}$ 83) $\frac{9}{16}$

76) $\frac{71}{12}$ 80) $\frac{17}{25}$ 78) $\frac{58}{111}$ 82) $\frac{37}{300}$ 84) $\frac{49}{11}$

F. Escriba las fracciones impropias siguientes como números mixtos.

85) $\frac{3}{2}$ 87) $\frac{98}{3}$ 89) $\frac{328}{15}$ 91) $\frac{825}{23}$ 93) $\frac{743}{29}$

86) $\frac{136}{11}$ 88) $\frac{973}{33}$ 90) $\frac{145}{6}$ 92) $\frac{29}{8}$ 94) $\frac{201}{16}$

G. Convierta los números mixtos siguientes a fracciones:

95) $2\frac{3}{5}$ 97) $2\frac{6}{7}$ 99) $3\frac{8}{9}$ 101) $31\frac{5}{6}$ 103) $3\frac{9}{13}$

96) $25\frac{3}{7}$ 98) $-21\frac{3}{13}$ 100) $16\frac{13}{15}$ 102) $18\frac{9}{17}$ 104) $-6\frac{11}{14}$

H. Opere y simplifique:

105) $\frac{6}{11} \div \left(\frac{5}{12} - \frac{23}{30}\right)$

106) $\frac{7}{15} - \frac{11}{24} - \frac{13}{36}$

107) $\frac{3}{2} - \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{6}$

108) $\frac{5}{36} - \frac{4}{-63} + 3 - \frac{8}{-3}$

109) $\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{5} + \frac{21}{63}\right)$

110) $\frac{11}{15} + \frac{8}{13}\left(\frac{3}{16} - \frac{11}{24}\right)$

111) $\frac{9}{10} + \frac{15}{-28} - \frac{7}{8} - \frac{11}{-12}$

112) $\left(4 - \frac{1}{4}\right) \times \left(5 - \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{18}$

113) $\frac{7}{12} + \left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)$

114) $\frac{5}{8} - \frac{9}{8} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12}\right)$

115) $\left(7 + 3\frac{1}{8}\right) \div \left(14 + 6\frac{1}{4}\right)$

116) $\frac{53}{25} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) \div 2\frac{1}{3}$

117) $-\frac{7}{24} - \frac{13}{24} - \frac{19}{24}$

118) $-\frac{7}{4} \div \frac{14}{8}(-3)$

119) $\frac{7}{8} + 1\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{9}$

120) $$\frac{13}{19}-\frac{5}{27}\div\frac{22}{15}$$

121) $$\frac{1}{4}+\frac{5}{16}\times\frac{8}{3}-\frac{3}{8}$$

122) $$\frac{5}{12}-\frac{11}{36}\div\frac{22}{15}$$

123) $$\frac{3}{10}\div\left\{\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{4}-\frac{8}{3}\right)\right\}-\frac{11}{5}$$

124) $$\frac{7}{3}+\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{2}+\left\{\frac{9}{10}-\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-1\right)\right\}\right]$$

I. Resuelva las siguientes fracciones complejas

125) $$\frac{\dfrac{\frac{2}{3}\left(3-\frac{3}{5}\right)}{3\frac{1}{5}}}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{10}\right)}$$

126) $$\frac{\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{9}}{\dfrac{3}{27}-\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2}{9}-1}+1$$

127) $$1+\frac{3-\frac{1}{5}}{1+\dfrac{\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1+\dfrac{1}{\frac{3}{4}}}}$$

128) $$\frac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{4}\left(\dfrac{7}{14}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{21}{63}\right)}{1-\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{7}}{3\frac{2}{7}}}$$

129) $$\frac{17}{5}-\frac{3+\frac{3}{2}}{1+\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}}$$

130) $$\frac{1-\dfrac{\frac{1}{2}+3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}{3\frac{1}{2}}}{2+\dfrac{3}{\frac{2}{3}}}$$

131) $$\frac{\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{2}}{\dfrac{1+\frac{5}{3}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}}}$$

132) $$1-\frac{1+\dfrac{3/2+1/3}{1-1/2}}{\dfrac{1+1/2+1/3}{1+1/2}}$$

133) $$\frac{\dfrac{\frac{12}{5}}{2}+\dfrac{6}{5}\left(-\dfrac{3}{2}\right)}{\dfrac{5+\frac{1}{7}}{-1+\frac{7}{\frac{28}{9}}-\frac{15}{3}}}$$

134) $$\frac{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{5}\right)}{1+\dfrac{1-\frac{1}{2}+3}{1-\dfrac{1-\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}}}}$$

135) $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}} - \dfrac{1-\frac{5}{3}}{\frac{3}{7}+\frac{9}{6}}$

136) $1-\dfrac{1+\dfrac{1}{\frac{3}{2}-1}}{2-\dfrac{1}{\frac{3}{2}+1}}$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PARES

Ejercicios A

2) -5
4) 5
6) 10
8) 33
10) 7
12) 9
14) - 6
16) - 72
18) 17
20) 10
22) 6
24) -17
26) 26
28) 125
30) 9
32) 69
34) -5
36) 1679
38) 18

Ejercicios B

40) 2/3
42) 4/5
44) 7/11
46) 3/8
48) 4/5

Ejercicios C

50) 2/3
52) 1/8
54) - 9/2
56) - 2/3
58) - ¼

Ejercicios D

60) 2/3
62) 13/33
64) 269/20
66) 81/25
68) 949/990
70) - 229/25
72) 3/20
74) - 1627/300

Ejercicios E

76) $5.91\overline{6}$; Periódica mixta.
78) $0.5\overline{225}$; Periódica mixta.
80) 0.68 ; Finita.
82) $0.12\overline{3}$; Periódica mixta.
84) $4.\overline{45}$; Periódica pura.

Ejercicios F

86) $12\,\frac{4}{11}$
88) $29\,\frac{16}{33}$
90) $24\,\frac{1}{6}$
92) $3\,\frac{5}{8}$
94) $12\,\frac{9}{16}$

Ejercicios G

96) $\frac{178}{7}$
98) $-\frac{276}{13}$
100) $\frac{253}{15}$
102) $\frac{315}{17}$
104) $-\frac{95}{14}$

Ejercicios H

106) $-\frac{127}{360}$
108) $\frac{493}{84}$
110) ${}^{17}/_{30}$
112) 324
114) ${}^{1}/_{4}$
116) 2
118) 3
120) $\frac{2099}{3762}$
122) $\frac{5}{24}$
124) $\frac{13}{5}$

Ejercicios I

126) $\frac{158}{203}$
128) $\frac{299}{388}$
130) $\frac{2}{91}$
132) $-\frac{31}{11}$
134) $\frac{1}{15}$
136) $-\frac{7}{8}$

J. Problemas generales:

137) Una granja avícola posee 525 aves, entre las cuales hay gallinas ponedoras, pollos de engorde y patos. Si los 5/7 del total son gallinas ponedoras y 2/5 del resto son pollos de engorde, determine el número de gallinas, pollos y patos en la granja.

138) En una institución educativa la cuota mensual por colegiatura es de Q2590.00, determine:
¿Cuánto deberá pagar un estudiante si le conceden 3/7 partes de beca mensualmente?
¿De cuánto será el ahorro de dicho estudiante al primer año de estudios?

139) Se desea dividir en secciones del mismo tamaño, de la mayor longitud posible y sin desperdiciar nada, 48 tubos de polietileno de 80 centímetros y 36 tubos de la misma clase, que miden 60 centímetros. ¿Cuál será la longitud que deberán medir las secciones y cuántos segmentos se obtendrán en total?

140) La temperatura de la ciudad de Guatemala llega a 13°C a las 2:00 p.m. Si comienza a disminuir a un promedio de 7/3 grados por hora, calcular la lectura en el termómetro a las 11:00 p.m.

141) Si un queso pesa ½ de libra, entonces ¿Cuál es el peso de un queso y medio?

142) Una mezcla de 100 litros contiene 4/5 partes de agua y el resto de un insecticida comercial que contiene ¾ partes de ingrediente activo. Determine:
¿Cuántos litros hay del producto comercial en la mezcla?
¿Cuántos litros hay de ingrediente activo en la mezcla?

143) Una finca posee 260 manzanas de terreno, de las cuales 2/5 partes están cultivadas con frutales y 3/10 partes con cultivos de granos básicos. Del área restante, ½ es usada para producción de hortalizas, 1/3 tiene bosques y el resto está ocupada por la infraestructura (instalaciones y oficinas). ¿Cuántas manzanas se ocupan entonces para frutales, granos, hortalizas, bosques e infraestructura?

144) Una empresa exportadora de naranjas desea empacar en cajas, con fines de transporte y envío, 560, 200 y 400 naranjas pequeñas, medianas y grandes respectivamente. Si desea introducir el mismo número de naranjas en todas las cajas y en la mayor cantidad posible; determine cuántas cajas de naranja pequeña, mediana y grande se transportarán al lugar de destino.

145) Tres rollos de alambre espigado miden 2172, 3136 y 1892 metros de longitud y se desea dividirlos en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. Encontrar la longitud de los pedazos y cuantos se obtendrán de cada rollo.

146) La empresa “EXCRUTASA” obtuvo ingresos el año anterior por Q250,000.00 por venta de café, maíz y frijol. De los ingresos totales, 3/5 partes se lograron por venta de café, y del resto de ingresos 7/10 partes correspondieron a venta de maíz. Si se vendieron 75 quintales de frijol, determine:
¿Cuál fue el ingreso percibido, en quetzales, por venta de café, frijol y maíz?
¿Cuál fue el precio de venta por quintal de frijol?

147) En un velódromo parten simultáneamente tres ciclistas de un mismo punto de largada. Uno de los ciclistas da una vuelta cada 30 segundos, otro cada 27 segundos y el tercero cada 24 segundos. ¿A los cuántos segundos cruzan los tres ciclistas juntos, por primera vez por el punto de largada? ¿Cuántas vueltas ha dado el tercer ciclista en ese momento?

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS PARES

138) 375 gallinas
60 pollos
90 patos
140) - 8 °C
142) 15 litros
144) 14, 5 y 10 cajas
146) Q 150,000.00 por café.
Q 70,000.00 por maíz.
Q 30,000.00 por frijol.
Q 400.00 / qq de frijol.

2.5. EVALUACIONES

2.5.1. Evaluación 1

1) Indique qué enunciado(s) son falsos:

P) Todo número racional es entero. Q) Todo número entero es racional.
R) $\sqrt{2}$ es un número irracional. S) Todos los números decimales son irracionales

$\boxed{\text{a). P y S}}$ b) Q y R c) S d) Todas son falsas

2) Indique qué enunciado(s) son verdaderos:

P) π es un número racional Q) 3.7 es un número irracional
R) 44/11 es un número entero S) $\sqrt{5}$ es un número real

a) R b) P y Q c) Q y R $\boxed{\text{d) R y S}}$

3) Indique qué número(s) decimal(es) es (son) racional(es):

P). $0.3\overline{42}$ Q). 0.54 R). $1.\overline{13}$ S). 1.412570169

$\boxed{\text{a) P, Q y R}}$ b) P y Q c) P d) S

4) En jerarquía matemática para operaciones que tienen el mismo nivel jerárquico procedemos a operar de:

P) De derecha a izquierda Q). De arriba para abajo
R) De izquierda a derecha S). De abajo para arriba

a) S b) P $\boxed{\text{c) R}}$ d) Q

5) El resultado correcto de la operación: 14 ÷ [7 (18 - 20)]

a) 1 $\boxed{\text{b) -1}}$ c) 4 d) -4

6) El área de un círculo ($A = \pi r^2$) es un número:

a) Racional b) Entero $\boxed{\text{c) Irracional}}$ d) Natural

7) El resultado correcto de la operación: -2 + 3 [6 – 2 (3 -12)] es:

a) 110 b) 38 c) -38 $\boxed{\text{d) Ninguna es correcta}}$

8) El resultado correcto de la operación: - 6 { 6 + 7 (5 – 2 x 4)+ 5} es:

a) -606 b) 11 $\boxed{\text{c) 60}}$ d) Ninguna es correcta

9) De la operación: $5 – 2 [3 (7 – 4) – (- 12 + 3)] – 6$ se tiene como resultado:

a) Un número natural
b) Un entero negativo
c) Un entero positivo
d) a y c es correcta

10) El número que representa la expresión: $12 – \{-2 + 3 [4 – (12 - 8) + 1] – 2\} + 3$ es:

a) – 8
b) 4
c) -4
d) 16

11) Sistema de numeración que utilizó el cero

a) Babilónico
b) Egipcio
c) Binario
d) Ninguna de las anteriores

12) En la adición, la siguiente expresión: $a + b = b + a$ representa la propiedad:

a) Clausurativa
b) Asociativa
c) Conmutativa
d) Ninguna es correcta

13) En operaciones como: $3 (4 + 5)$, se puede realizar haciendo primero la suma entre paréntesis, obteniendo $3 (12)$. ¿Cuál de las propiedades de los números enteros se ha tomado como base al optar por dicho procedimiento?

a) Clausurativa
b) Conmutativa
c) Distributiva
d) Ninguna de las anteriores

14) Dentro del conjunto de operaciones contenidas en la expresión $[- 3 \{ 2 – (17 – 5)\div 3 \}]^7$, hay una de ellas que debe realizarse primero al iniciar los cálculos debido a que :

a) La resta tiene prioridad sobre cualquiera de las otras operaciones contenidas en la expresión
b) La potencia tiene prioridad sobre cualquier otra operación contenida en dicha expresión
c) Debe realizarse primero la operación contenida dentro del corchete
d) Deben realizarse primero las operaciones contenidas dentro de los símbolos de agrupación desde los más internos hacia los más externos.

15) En cuáles de las siguientes propiedades de los números reales se sustenta lo siguiente $(3 + 4) + (5 + 6) + 7$ es igual a $(6 + 5) + (4 + 7) + 3$:

a) Distributiva y asociativa
b) Asociativa y conmutativa
c) Conmutativa y distributiva
d) El orden de los factores no altera el producto y propiedad del inverso aditivo

16) El resultado de la operación [-2 { - 4 – 3 } – 14] ÷ { 7 – 7 x 9 } , es :

a) 56 b) Cero c) -56 d) Ninguna es correcta

17) El resultado de la siguiente operación [3 (9 x 4 + 3) – 3 (4 – 8)] ÷ 7 x 7 - (9 + 13 – 18), es :

a) 857 ÷ 7 b) – 125 c) -857÷ 7 d) 125

18) Es el número que tiene la misma cantidad o magnitud pero su signo es diferente.

a) Valor absoluto b) Número opuesto c) Inverso aditivo
d) Ninguna de las anteriores

19) El resultado de la siguiente operación con números enteros:
(2 - 7) (8 - 10) – 16 x 3 ÷ [(-3-9) (4 - 2)]

a) 12 b) 260 c) – 30 d) 18

20) Qué relación de orden existe entre los dos siguientes números: - 10 con respecto a -3.

a) –10 es mayor que -3 b) –10 es menor que – 3 c) –10 es igual a – 3
d) Ninguna de las anteriores es correcta

2.5.2. Evaluación 2

SERIE I: (10 puntos; 5 c/u, 5 minutos)

Exprese cada fracción como un numero mixto o bien cada número mixto como una fracción.

a. $\frac{19}{11}$ — **Respuesta:** 1 8/11

b. 7 6/10 — **Respuesta:** 38/5

SERIE II: (15 puntos; 5 c/u , 10 minutos)

Determinar la fracción irreducible correspondiente a cada decimal

a). $2.\overline{136}$ — **Respuesta:** 2134/999

b). 0.75 — **Respuesta:** 3/4

c). $1.\overline{126}$ — **Respuesta:** 125/111

SERI III: (15 puntos; 5 c/u , 10 minutos)
Exprese como un número decimal cada fracción, además indique que tipo decimal es.

a. $\frac{25}{20}$ — **Respuesta:** 1.25 Decimal exacto.

b. $\frac{293}{495}$ — **Respuesta:** $0.5\overline{91}$ Decimal periódico mixto.

c. $\frac{24}{9}$ — **Respuesta:** $2.\overline{6}$ Decimal periódico puro.

SERIE IV: (30 puntos; 15 c/u, 10 minutos)
Calcule el MCM y el MCD de los siguientes números

a. 36, 60 y 48 — **Respuesta:** MCM: 720 MCD: 12

b. 10, 11 y 20 — **Respuesta:** MCM: 2,200 MCD: No existe.

SERIE V: (30 puntos ; 15 c/u , 25 minutos)
Opere y simplifique

a. $- \{ 2/3 + [1/5 - (1/4 + 2/5) - 5/4] + 1 \}$ — **Respuesta:** 1/30

b. $(4 - 1/4) (5 - 1/5) \div 2/5 \times 4/25$ — **Respuesta:** 36/5

2.5.3. Evaluación 3

1) El resultado correcto de la operación: **(-4+5)÷(-1)+3-21÷(-7)÷3[-11x(-2)-19]** es:

a) -5 | **b) 5** | **c) 0** | **d) Ninguna es correcta**

2) El inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es:

a) $\frac{3}{4}$ | **b)** $\frac{4}{3}$ | **c)** $\frac{-4}{3}$ | **d)** $\frac{3}{4}$

3) El resultado correcto de la operación:
- { 10 – 3 x 4 [17+ 3 (5 - 13)] – [- 32 + 4 (- 9 - 2 - 11) (-15 + 11)] ÷ 5 } es:

a) - 30 | **b) 30** | **c) 260** | **d) Ninguna es correcta**

4) Indique el resultado de operar y simplificar la operación:

$$\frac{7}{3}+\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{2}+\left\{\frac{9}{10}-\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-1\right)\right\}\right]$$

a) 5/13 | **b) 61/15** | **c) 13/5** | **d) 34/15**

5) El resultado de la operación $\left[-12+2(8-2\times 3)^{3}\right]\div 10-3$ es:

a) 48/7 | **b) 9** | **c) -9** | **d) -13/15**

6) La fracción reducida equivalente al decimal **2.045** es:

a) 225/110 | **b) 45/22** | **c) 25/11** | **d) Ninguna es correcta**

La siguiente fracción compleja le servirá para responder las preguntas 7, 8 y 9.

De la fracción compleja $\dfrac{17}{5} - \dfrac{3+\dfrac{3}{2}}{1+\dfrac{3-\dfrac{1}{3}}{2+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}}}$

7) El resultado parcial de operar $1+\dfrac{3-\dfrac{1}{3}}{2+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}}$ es:

a) 3/7 **b) 7/3** **c) 4/3** **d) 5/3**

8) El resultado parcial de operar $\dfrac{3+\dfrac{3}{2}}{1+\dfrac{3-\dfrac{1}{3}}{2+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}}}$ es:

a) -9/10 **b) 27/10** **c) -27/10** **d) -21/2**

9) El resultado de **toda la operación** es:

a) 7/10 **b) -16/35** **c) 61/10** **d) 70/10**

10) El decimal equivalente a la fracción **51/11** es:

a) $\mathbf{4.0\overline{6}3}$ **b)** $\mathbf{4.\overline{6}3}$ **c)** $\mathbf{4.\overline{63}}$ **d) Ninguna es correcta**

11) El resultado correcto de simplificar la operación:
$\{\mathbf{4} + [(\mathbf{5}-\mathbf{3}) \div \mathbf{4}]\} \div \left\{\{\mathbf{1}-\mathbf{3}[(\mathbf{4}+\mathbf{1}) \div \mathbf{2}] - \mathbf{3}\} \div \mathbf{5}\right\}$ es:

a) 9 **b) -60/19** **c) 45/19** **d) – 45/19**

12) En una empresa agroexportadora, reparten los pedidos hacia tres diferentes destinos cada 5, 6 y 8 minutos. ¿A cada cuántos minutos ocurre un envió simultaneo a los tres destinos?

a) 120 **b) 200** **c) 340** **d) Ninguna es correcta**

13) Un estudiante del curso propedéutico utiliza 3/8 del día para actividades de módulo y clases; 1/6 para recibir tutoría y alimentarse y 8 horas para dormir. El número de horas que le queda para practicar algún deporte u otra actividad es:

a) 2 **b) 4** $\boxed{\textbf{c) 3}}$ **d) Ninguna es correcta**

14) Tres trozas (troncos) de 12, 18 y 24 metros de longitud respectivamente, deben cortarse en trozas iguales y de la mayor longitud posible para no desperdiciar madera. El número total de trozas que se obtienen al final es:

a) 6 **b) 4** **c) 8** $\boxed{\textbf{d) 9}}$

15) Una persona compra un cerdo de 250 libras en Q2,000.00 utilizando 2/5 partes del total del dinero que llevaba. El total de dinero que llevaba es:

a) Q10000.00 **b) Q15000.00** $\boxed{\textbf{c) 5000.00}}$ **d) Ninguna es correcta**

La siguiente fracción compleja le servirá para responder las preguntas 16, 17 y 18.

De la fracción compleja $$2+\cfrac{\cfrac{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\times 3-1}{\cfrac{1+\frac{8}{3}-\frac{5}{2}}{1-\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}}+2}$$

16) El resultado parcial de operar $\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\times 3-1$ es:

$\boxed{\textbf{a) 2/3}}$ **b) 10/9** **c) 15/6** **d) 53/6**

17) El resultado parcial de operar $\dfrac{1+\frac{8}{3}-\frac{5}{2}}{1-\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}}+2$ es:

a) 7/3 **b) 7/6** $\boxed{\textbf{c) 13/3}}$ **d) 17/30**

18) El resultado de **toda la operación** es:

a) 24/13 **b) 28/13** **c) 24/5** **d) Ninguna es correcta**

19) Si un queso pesa 1/2 de libra, entonces ¿Cuál es el peso en libras de un queso y medio?

a) 3/12 **b) 3/2** **c) 1/2** **d) 3/4**

20) Determine el MCD de 15, 20 y 30:

a) 5 **b) 60** **c) 12** **d) Ninguna es correcta**

BIBLIOGRAFÍA

1. Ardón López, CE. (2008). *Aritmética y álgebra para estudiantes de agronomía y dasonomía*. Guatemala: ENCA.

2. Barnett, R. (1990). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. 2a ed. México: Mc-Graw Hill.

3. Duarte Beza, S ; Rodríguez, JE. (1996). *Matemáticas 1*. Guatemala: Santillana.

4. Joya Vega, A; Chizner Ramos, JA. (2010). *Hipertexto matemáticas 7*. Colombia: Santillana.

5. Stewart, J; Redlin, L; Watson, S. (2012). *Precálculo matemáticas para el cálculo*. 6a ed. México, CENAGE.

6. Sulivan, M. (2006). *Álgebra y trigonometría.* 7ª ed. México, Person Educación.

7. Swokowski, EW; Cole, JA. (2009). *Algebra y trigonometría con geometría analítica*. 12a ed. México: Thomson.

8. Zill, DG; Dewar, JM. (2012). *Algebra, trigonometría y geometría analítica*. 3ª ed. México, McGraw-Hill.

ENLACES A VÍDEOS QUE SE PUEDEN CONSULTAR

Clasificación de los números
https://www.youtube.com/watch?v=rtNC7g1h_JA

Propiedades de la suma y la multiplicación
https://www.youtube.com/watch?v=18vc-DZiRSU

Jerarquía operativa
https://www.youtube.com/watch?v=FIjylOufxyU
https://www.youtube.com/watch?v=FDJ7nu8f6Js

Factorización números naturales en factores primos
https://www.youtube.com/watch?v=NPaBFe6QBDQ
https://www.youtube.com/watch?v=sHe8iCJaObw

MCM
https://www.youtube.com/watch?v=txLIA_fyL5g
https://www.youtube.com/watch?v=XmRg6UBOBiA
https://www.youtube.com/watch?v=L9PNc2CBSxc

MCD
https://www.youtube.com/watch?v=UbJEo0Sc3XY
https://www.youtube.com/watch?v=SErd-du3RMc
https://www.youtube.com/watch?v=0N_-gYpGJiE

Operaciones con fracciones

https://www.youtube.com/watch?v=3HNyVbBNGQQ
https://www.youtube.com/watch?v=antZqj9ePys
https://www.youtube.com/watch?v=LVHo5xvsvO0
https://www.youtube.com/watch?v=efz0Efj5Big
https://www.youtube.com/watch?v=FRPijN0ie3U
https://www.youtube.com/watch?v=jvNr-n3KZ5A
https://www.youtube.com/watch?v=HKz0OB5imBM
https://www.youtube.com/watch?v=RNtvQitNbLk
https://www.youtube.com/watch?v=LgMptyzudXU
https://www.youtube.com/watch?v=KDDcZCvgx5k